

## KHAI TRIỂN HAI TRỤ GIAO NHAU VÀ TÍNH TOÁN TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM THUỘC HÌNH KHAI TRIỂN, ỨNG DỤNG TRONG GIA CÔNG CƠ KHÍ

DEVELOP THE SURFACE OF TWO INTERSECTING CYLINDERS AND CALCULATE THE COORDINATES OF THE POINTS BELONGING TO THAT DEVELOPED SHAPE, APPLIED IN MECHANICAL MACHINING

**Nguyễn Thị Thu Nga**

Trường Cơ khí, Đại học Bách Khoa Hà Nội

Email: nga.nguyenthithu@hust.edu.vn

### TÓM TẮT

*Bài báo trình bày cách khai triển hai trụ giao nhau và xác định tọa độ các điểm thuộc đường bao hình khai triển dựa trên phương pháp giải tích, hình học họa hình kết hợp lập trình tính toán. Các kết quả tính toán được lập trình bằng ngôn ngữ Autolisp thực hiện chức năng xác định tọa độ các điểm thuộc giao tuyến và hình khai triển, từ đó tự động xây dựng hình khai triển hai trụ giao nhau, ứng dụng trong gia công cơ khí như chế tạo các ống dẫn công nghiệp có dạng hình trụ từ tấm kim loại phẳng, tự động hàn, gia công biến dạng dẻo... giúp nâng cao hiệu quả và tiết kiệm nguyên vật liệu.*

**Từ khóa:** *Giao hai trụ; Khai triển trụ; Khai triển hai trụ giao nhau; Khai triển mặt bậc hai.*

### ABSTRACT

*The paper presents methods for developing the surface of two intersecting cylinders and determining the coordinates of points on contour of that developed shape, based on the method of analysis, graphic geometry combined with computational programming. The calculation results are programmed in the Autolisp language to determine the coordinates of points on the developed shape, thereby automatically constructing the development of two intersecting cylinders. It can be applied in teaching and mechanical processing such as the fabrication of cylindrical industrial pipes from flat metal sheets, automatic cutting of shapes and welding which improve efficiency and save materials.*

**Keywords:** *Intersection of cylinders; Development of quadratic surface; Development of cylinders.*

## 1. GIỚI THIỆU

Trong gia công cơ khí, nhiều chi tiết như các đường ống, bồn chứa, vỏ máy, các khuôn đúc... có hình dạng lăng trụ, nón, trụ... được chế tạo từ các tấm kim loại phẳng. Để chế tạo các chi tiết 3D từ tấm kim loại phẳng cần khai triển các chi tiết đó dưới dạng mặt phẳng. Khai triển một khối vật thể là trải các bề mặt của khối vật thể lên một mặt phẳng sao cho không có hiện tượng rách và gấp nếp, rồi dùng nó làm mẫu cắt cho tấm kim loại phẳng.

Trên thế giới, việc ứng dụng công nghệ thông tin vào tự động hóa gia công cơ khí như cắt hình trong gia công biến dạng dẻo, hàn tự động giao của các phôi thép... đã phát triển ở mức độ cao. Tại Việt Nam, mặc dù ngành cơ khí đã có những tiến bộ vượt bậc, nhưng ở nhiều nơi, trang thiết bị vẫn còn lạc hậu và không phù hợp với công nghệ hiện đại. Để nhập khẩu công nghệ, chúng ta phải chi rất nhiều tiền mà chưa chắc đã phù hợp với điều kiện kinh tế và trang thiết bị máy móc của Việt Nam. Do đó, việc tạo ra phần mềm tự động hóa chi phí thấp trong gia công cơ khí phù hợp với điều kiện ở Việt Nam là rất cần thiết. Hiện nay có một số phần mềm có thể tự động khai triển các bề mặt như AutoCAD, SolidWorks, Inventor... nhưng chúng không đáp ứng được hoặc chỉ đáp ứng được một phần nhu cầu tự động hóa trong gia công cơ khí. SolidWorks, Inventor là các phần mềm phổ biến nhất trong việc khai triển các bề mặt nhờ tính năng Sheet Metal để tạo hình khai triển cho các dạng uốn, dập... Nhưng với các bề mặt không khả triển, chúng chỉ có thể xấp xỉ bằng phương pháp chia lưới, chia nhỏ các bề mặt. Các phần mềm này sẽ biến đổi bề mặt cong phức tạp thành các mảnh phẳng gần giống nhau để gia công. AutoCAD có thể sử dụng tính năng Flatten hoặc các lệnh dựng hình cơ bản để khai triển các khối nón, trụ, chóp đơn giản nhưng với khối phức tạp, AutoCAD

thường phải sử dụng thêm các ứng dụng bên thứ ba như Lisp hoặc Plugin chuyên dụng. Để khai triển chính xác, người ta thường dùng các phần mềm chuyên dụng như CAMduct hoặc các modul nâng cao. Tuy nhiên, các phần mềm này phải mua với giá cao và không làm chủ được cơ sở dữ liệu.

Dựa trên nhu cầu thực tiễn đó, bài báo xây dựng thuật toán để xác định tọa độ hình khai triển giao hai trụ để có cơ sở dữ liệu tạo ra phần mềm tự động khai triển các bề mặt trụ giao nhau. Từ đó ứng dụng trong gia công cơ khí chế tạo các chi tiết như ống dẫn công nghiệp với các khớp nối, khuỷu, bồn chứa, vỏ máy, bao bì, có dạng hình trụ từ tấm kim loại phẳng, ứng dụng trong tự động hàn và gia công biến dạng dẻo.

## 2. TÍNH TOÁN KHAI TRIỂN HAI TRỤ GIAO NHAU

### 2.1. Khai triển hai trụ giao nhau có hai trục cắt nhau theo một góc $\alpha$ [1], [2], [3], [4]

#### a. Hai trụ bán kính bằng nhau

Hai trụ bán kính bằng nhau có giao tuyến là hai elip.

#### \*Khai triển trụ thẳng đứng:

Trụ thẳng đứng có hình khai triển là hình chữ nhật, chiều cao là H, chiều rộng là  $2\pi R$ .

$$\text{Góc } \beta = 90^\circ - \alpha \quad \text{Với } x = \frac{\pi R k \varphi}{180} \quad (1)$$

$$\text{Khai triển elip AB có } y_1 = R \cdot \tan \alpha \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

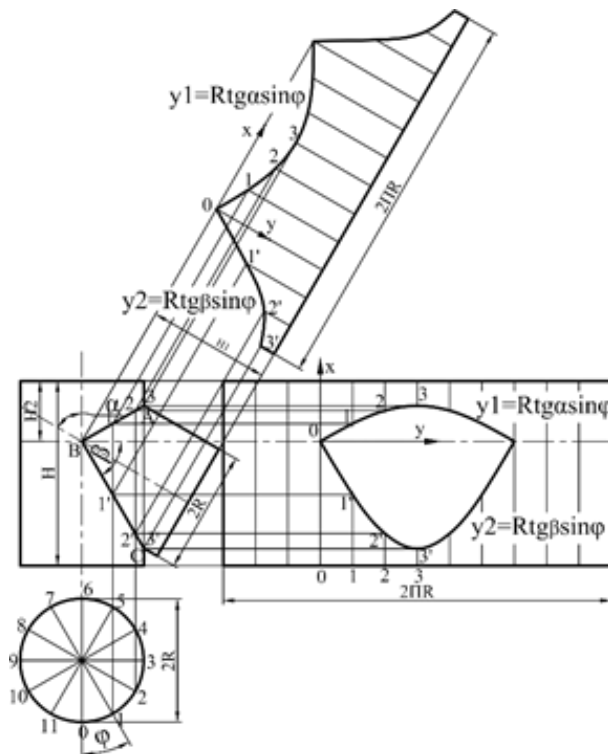
$$\text{Khai triển elip AC có } y_2 = R \cdot \tan \beta \cdot \sin \varphi \quad (3)$$



**\*Khai triển trụ xiên:**

$$x = \frac{\pi R k \varphi}{180}, H_3 = H_1 - \frac{R}{\tan \alpha} \quad (4)$$

$$y_1 = R \tan \alpha \cdot \sin \varphi; y_2 = R \tan \beta \cdot \sin \varphi \quad (5)$$



Hình 1. Khai triển hai trụ có bán kính bằng nhau giao nhau.

**b. Hai trụ bán kính không bằng nhau**

Hai trụ có bán kính không bằng nhau giao nhau giao tuyến là đường cong ghềnh bậc bốn. Tọa độ điểm K của hình khai triển được tính toán như hình 2.

**\*Khai triển trụ xiên:**

Chiều rộng hình khai triển trụ xiên là  $2\pi R_1$

$$\text{Trên hình khai triển có: } x = \frac{\pi R_1 k \varphi}{180} \quad (6)$$

Đặt  $KB = j_k$  và  $BC = i_k$ .

$$\text{Vậy: } y_k = i_k + j_k + H_4 \quad (7)$$

$$\text{Trong đó: } i_k = BC = H_1 - \frac{R}{\sin \alpha} - \frac{R_1}{\tan \alpha};$$

$$j_k = KB = \frac{(R - \sqrt{R^2 - R_1^2 \sin^2 k \varphi})}{\sin \alpha}$$

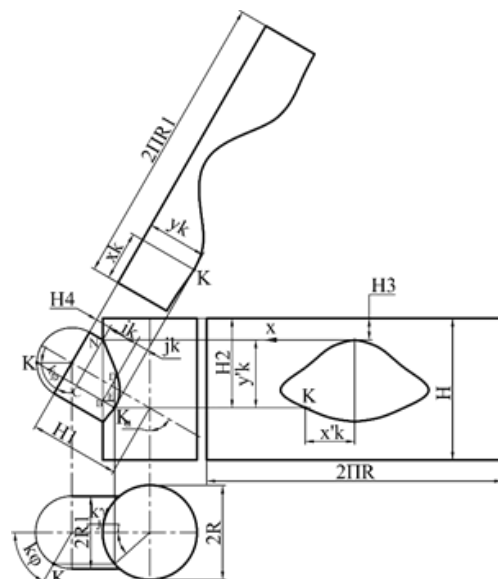
**\* Khai triển trụ thẳng đứng:**

Trụ thẳng đứng có hình khai triển là hình chữ nhật chiều cao H, chiều rộng  $2\pi R$ . Khi chia trụ nhỏ ra các góc bằng nhau  $k\varphi$  thì trên trụ to tương ứng có góc  $k\gamma$ . Mối liên hệ giữa  $\varphi$  và  $\gamma$  là:

$$R_1 \sin k\varphi = R \sin k\gamma \rightarrow \sin k\gamma = \frac{R_1}{R} \sin k\varphi$$

$$\text{Tìm góc } \gamma \text{ từ } \varphi. x'_k = \frac{\pi R k \gamma}{180} \quad (8)$$

$$y'_k = \frac{1}{\sin \alpha} [R(1 - \cos k\gamma) \cos \alpha + R_1(1 + \cos k\varphi)] \quad (9)$$



Hình 2. Khai triển hai trụ có bán kính không bằng nhau giao nhau

## 2.2. Khai triển hai trụ giao nhau có hai trục chéo nhau theo một góc $\gamma$ [1]

Hai trụ chéo nhau có góc giữa hai trục là  $\gamma$ , khoảng cách giữa hai trục là  $e$ . Hai trụ có đường kính lần lượt là  $D$  và  $d$ . Hình khai triển được tính toán theo hình 3.

**\*Khai triển trụ xiên:**

$$\frac{D}{2} \cos \theta_1 = \frac{d}{2} + e \rightarrow \cos \theta_1 = \frac{2}{D} \left( \frac{d}{2} + e \right) \rightarrow \theta_1$$

$$\frac{D}{2} \cos \theta_2 = \frac{d}{2} - e \rightarrow \cos \theta_2 = \frac{2}{D} \left( \frac{d}{2} - e \right) \rightarrow \theta_2$$

Trên hình khai triển, tọa độ các điểm thuộc giao tuyến được tính như sau:

$$x_k = \frac{\pi d}{360} k \alpha \quad (10)$$

$$y_k = m_k + n_k$$

$$m_k = \frac{H_k}{\sin \gamma} = \frac{H - l_k}{\sin \gamma} \text{ v6i } l_k = \frac{D}{2} \sin(\theta + k\beta)$$

$$\rightarrow m_k = \frac{H - \frac{D}{2} \sin(\theta + k\beta)}{\sin \gamma}$$

$$n_k = \left( \frac{d}{2} + \frac{d}{2} \cos k\alpha \right) \cot gy$$

$$= \frac{d}{2} (1 + \cos k\alpha) \cot gy$$

Góc  $\beta$  phụ thuộc vào góc  $\theta_1$  như sau:

$$\frac{d}{2} \cos k\alpha = \left[ \frac{D}{2} \cos(\theta + k\beta) - e \right]$$

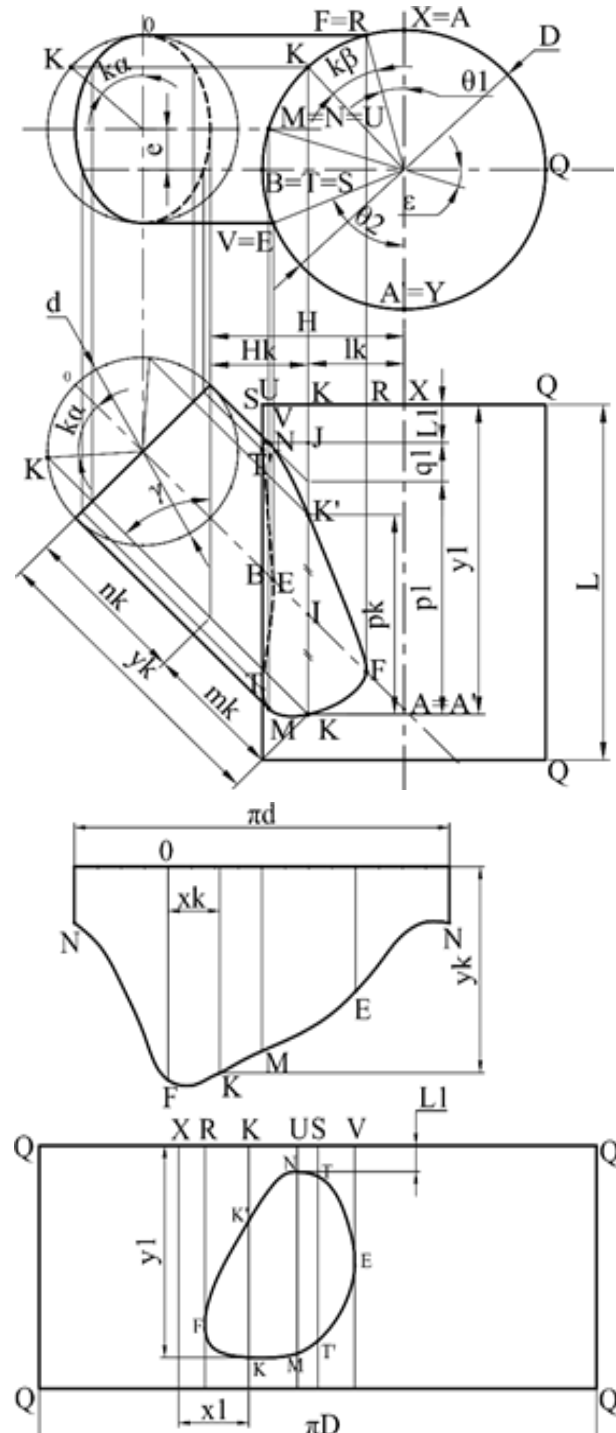
Đặt  $(\theta + k\beta) = \varphi$ , ta có:

$$\frac{D}{2} \cos \varphi = \frac{d}{2} \cos k\alpha + e \rightarrow \cos \varphi \rightarrow \varphi \rightarrow k\beta$$

$$y_k = m_k + n_k = \frac{H - \frac{D}{2} \sin(\theta + k\beta)}{\sin \gamma} + \frac{d}{2} (1 + \cos k\alpha) \cot \gamma \quad (11)$$

Chia đường tròn đáy trụ nhỏ ra thành  $n$  phần bằng nhau rồi tính  $x_k, y_k$  cho từng góc  $k\alpha$ ,

suy ra  $k\beta$ , ta có tọa độ các điểm thuộc hình khai triển của trụ xiên.



Hình 3. Khai triển hai trụ giao nhau có hai trục chéo nhau

\* Khai triển trụ thẳng đứng:

Theo đường sinh QQ, trụ thẳng đứng có hình khai triển là hình chữ nhật chiều rộng  $\pi d$ . Tính từ X, độ dài cung tròn khai triển là:

$$\widehat{XR} = \frac{\pi D \theta 1}{360^\circ}; \widehat{RK} = \frac{\pi D k \beta}{360^\circ};$$

$$\widehat{US} = \frac{\pi D}{360^\circ} \varepsilon \text{ với } \sin \varepsilon = \frac{2e}{D};$$

$$\widehat{VY} = \frac{\pi D}{360^\circ} \theta 2; \widehat{QX} = \widehat{XS} = \widehat{SY} = \frac{\pi D}{4}$$

Gọi tọa độ điểm K bất kỳ trên đường khai triển giao tuyến là  $x_1, y_1$ .

$$x_1 \text{ là chiều dài cung } \widehat{XK} = \frac{\pi D}{360} k \alpha \quad (12)$$

$$y_1 = p_1 + q_1 + L_1;$$

$$p_1 = \frac{d}{2} \left( \frac{1 + \sin k \alpha}{\sin \gamma} \right)$$

$$\begin{aligned} NJ &= \frac{D}{2} [\sin(90^\circ - \varepsilon) - \sin(\theta 1 + k \beta)] \\ &= \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin(\theta 1 + k \beta)] \end{aligned}$$

Ta có:

$$q_1 = N_j \cot \gamma = \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin(\theta 1 + k \beta)] \cot \gamma$$

$$\rightarrow y_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \left\{ \frac{d}{2} \left( \frac{1 + \sin k \alpha}{\sin \gamma} \right) + \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin(\theta 1 + k \beta)] \cot \gamma \right\} + L_1 \quad (13)$$

- Tại M:  $x_1$  là chiều dài khai triển cung  $\widehat{XU}$

$$\rightarrow y_1 = \frac{d}{\sin \gamma} + L_1$$

- Tại F:  $x_1$  là chiều dài khai triển cung  $\widehat{XR}$

$$y_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \left\{ \frac{d}{2} + \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin \theta 1] \cot \gamma \right\} + L_1$$

- Tại E:  $x_1$  là chiều dài khai triển cung  $\widehat{XV}$

$$y_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \left\{ \frac{d}{2} + \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin \theta 2] \cot \gamma \right\} + L_1$$

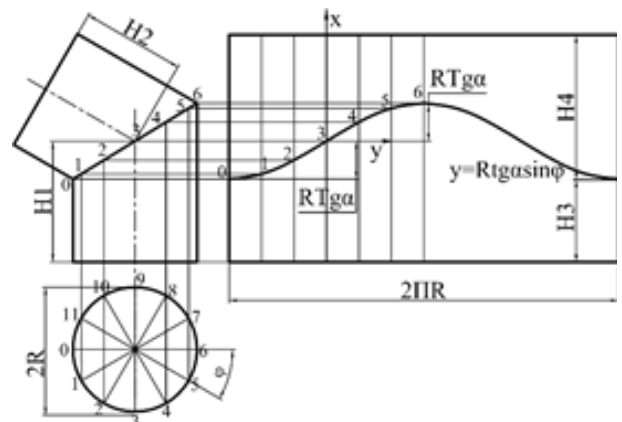
- Tại N:  $x_1$  là chiều dài cung  $\widehat{XU}$ ;  $y_1 = L_1$

- Tại K':  $x_1$  là chiều dài khai triển cung  $\widehat{XK}$

$$\rightarrow y_1 = \frac{1}{\sin \gamma} \left\{ \frac{d}{2} (1 - \sin k \alpha) \right\} + \frac{D}{2} [\cos \varepsilon - \sin(\theta 1 + k \beta)] \cot \gamma + L_1 \quad (14)$$

Tính  $x_1, y_1$  của từng điểm với các giá trị khác nhau để dựng hình khai triển.

### 2.3. Khai triển hai trụ nối tiếp [1], [2], [3], [4]



Hình 4. Khai triển hai trụ nối tiếp

Hai trụ nối tiếp với nhau có cùng bán kính R có giao tuyến là một elip được khai triển như hình 4. Đường bao hình khai triển của giao tuyến là một đường hình sin có độ dài của bước là  $2\pi R$  và biên độ là  $R \cdot \tan \alpha$ .

$$\beta = 90^\circ - \alpha; H_3 = H_1 - R \cdot \tan \beta \quad (15)$$

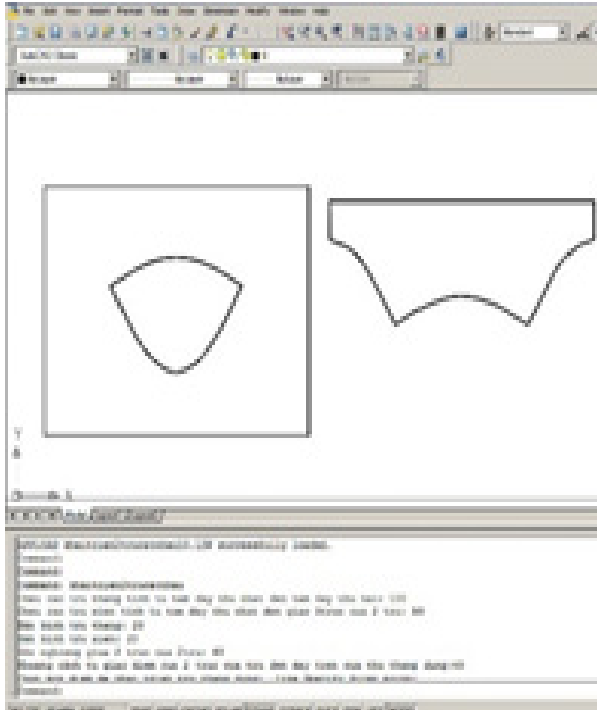
$$H_4 = H_2 + R \cdot \tan \beta \quad (16)$$

Ta chia đường tròn đầy trụ ra các góc nhỏ bằng nhau  $k\phi$ , tọa độ  $x, y$  của hình khai triển:

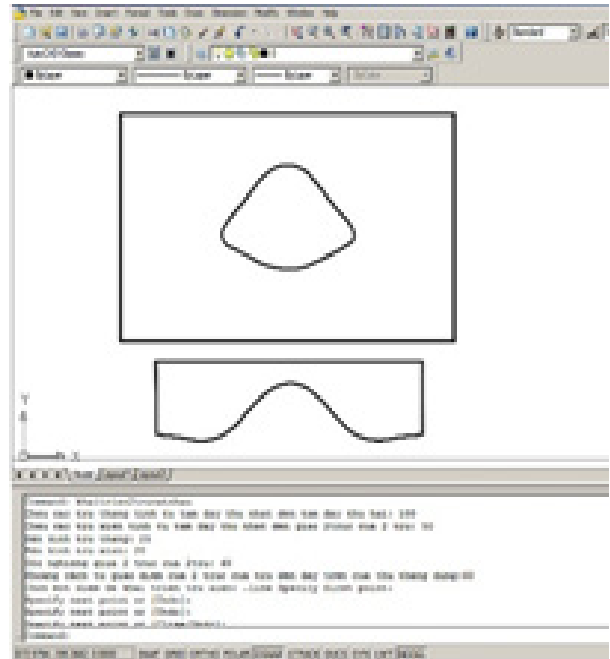
$$x = \frac{\pi R k \varphi}{180}; y = R \cdot \tan \beta \cdot \sin \varphi \quad (17)$$

### 3. LẬP TRÌNH TỰ ĐỘNG KHAI TRIỂN HAI TRỤ GIAO NHAU VÀ XUẤT TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM THUỘC HÌNH KHAI TRIỂN [5]

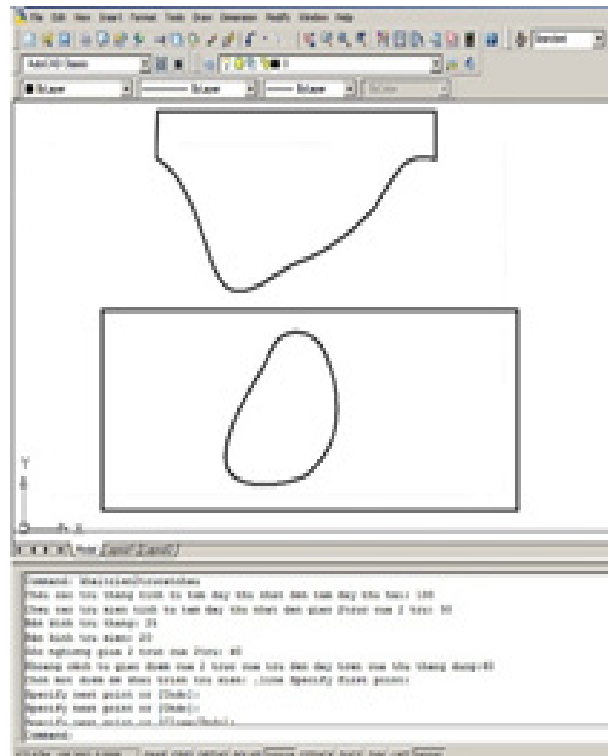
Dựa vào kết quả tính toán tọa độ các điểm thuộc hình khai triển của hai trụ giao nhau như trên, với ngôn ngữ lập trình AutoLisp, các hình được tự động khai triển. Chương trình chạy trên môi trường AutoCAD. Người dùng không cần dựng khối 3D của vật thể như trên SolidWorks hoặc Inventor, mà chỉ cần gọi lệnh vẽ hình khai triển, nhập các thông số của hai trụ giao nhau, hình khai triển sẽ được tự động vẽ trên AutoCAD và có thể xuất tọa độ điểm thuộc hình khai triển nếu cần.



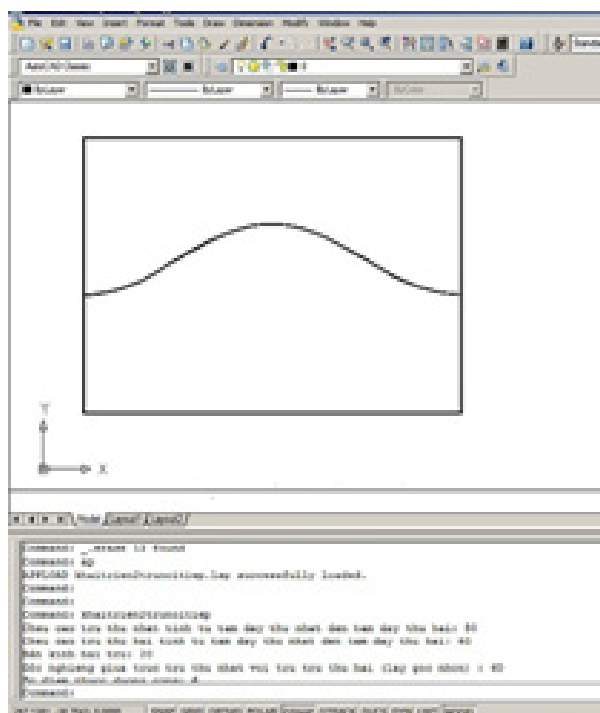
Hình 5. Tự động khai triển giao hai trụ bán kính bằng nhau có hai trục cắt nhau từ công thức (1), (2), (3), (4), (5)



Hình 6. Tự động khai triển giao hai trụ bán kính không bằng nhau có hai trục cắt nhau từ công thức (6), (7), (8), (9).



Hình 7. Tự động khai triển giao hai trụ có hai trục chéo nhau từ công thức (10), (11), (12), (13), (14).



Hình 8. Tự động khai triển giao nối tiếp từ công thức (15), (16), (17).

## 4. KẾT LUẬN

Bài báo này trình bày phương pháp xác định tọa độ các điểm trên hình khai triển hai trụ giao nhau, sử dụng ngôn ngữ lập trình Autolisp để tự động tìm tọa độ các điểm thuộc hình khai triển và vẽ hình khai triển. Nhờ đó có thể làm chủ cơ sở dữ liệu làm tiền đề để phát triển, xây dựng các phần mềm điều khiển hệ thống gia công cơ khí tự động như cắt CMC, hàn tự động các phôi thép phù hợp với điều kiện thiết bị cũng như trình độ chuyên môn của người lao động Việt Nam.

Có thể ứng dụng trong giảng dạy về gia công cơ khí như chế tạo các ống dẫn công nghiệp với các khớp nối, khuỷu, bồn chứa, vỏ máy, bao bì,... có dạng hình trụ từ tấm kim loại phẳng, trong tự động hàn và gia công biến dạng dẻo, tạo hình phôi... giúp nâng cao hiệu quả và giảm thiểu lãng phí vật liệu trong gia công cơ khí. ❖

Ngày nhận bài: 27/03/2026

Ngày phản biện: 01/04/2026

## Tài liệu tham khảo:

- [1]. Phạm Văn Nhuận, Phạm Tuấn Anh, “*Khai triển các mặt-ứng dụng máy tính để vẽ hình khai triển*”. NXB. Khoa học Kỹ thuật, 2003.
- [2]. K. Venkata Reddy, “*Textbook of Engineering Drawing*”. BS Publications, 2008.
- [3]. N. D. BHatt, “*Engineering Drawing*”. Charotar Publishing House, New Delhi, 2011.
- [4]. Nguyễn Thị Thu Nga, “*Determining the Coordinates of the Points on the Contours of the Development of Quadratic Surfaces and Their Intersections*”. International Research Journal of Innovations in Engineering and Technology – IRJIET, Volume 9, Issue 3, March 2025.
- [5]. Dhananjay Jolhe, “*Engineering Drawing with an Introduction to AutoCAD*”. Tata McGraw Hill, 2017.