

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN NGƯỢC ĐỘNG LỰC HỌC BAY

ON A METHOD FOR SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF FLIGHT DYNAMICS

TS. Nguyễn Nam Quý
Khoa Vũ khí, Học viện Kỹ thuật quân sự
Email: nnq26021983@gmail.com

TÓM TẮT

Trong thực tế thiết kế chế tạo các khí cụ bay (tên lửa, đạn,...) một vấn đề hết sức cấp thiết là tính toán, thiết kế sao cho khí cụ bay thực hiện theo quỹ đạo mong muốn. Về mặt động lực học, đây là bài toán ngược, nghĩa là phải đi tìm kết cấu, động lực học và điều khiển khí cụ bay để đạt được nhiệm vụ đặt ra. Bài báo này đặt ra nhiệm vụ giải quyết một phần của bài toán ngược phức tạp đó, cụ thể là theo yêu cầu về quỹ đạo phải tìm lực đẩy động cơ $P(t)$, góc tấn $\alpha(t)$ và góc kren $\gamma(t)$ của khí cụ bay sao cho khí cụ bay thực hiện được quỹ đạo bay mong muốn.

Từ khóa: Thuật phóng ngoài; Lực đẩy động cơ; Góc tấn; Góc kren.

ABSTRACT

In designing and manufacturing flying objects (missiles, ammunition,...) one important requirement is that the objects have to fly on given desired trajectories. In terms of dynamics, this is the inverse problem, that means designers have to find out the structure, dynamics and type of guidance for objects to satisfy the requirement. This paper presents a solution to part of that complex inverse problem, to be concrete, this paper presents methods of finding such parameters as thrust $P(t)$, attack angle $\alpha(t)$ and roll angle $\gamma(t)$ based on the given desired trajectory.

Keywords: Exterior ballistics; Thrust; Attack angle; Roll angle.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để giải quyết bài toán chuyển động trong không gian của khí cụ bay (KCB), việc sử dụng các phương pháp biến phân cổ điển như phương pháp động lực học Беллман, nguyên lý Maximum Понтрягин không hiệu quả. Để xây dựng quá trình điều khiển trong động lực học bay cần dựa vào các khái niệm bài toán ngược động lực học điều khiển chuyển động [1, 2]. Giải bài toán ngược động lực học bay như một

dạng của bài toán biên được đề xuất đầu tiên bởi B.T. Тараненко [3].

Trong phạm vi bài báo này, tác giả trình bày nội dung và phương pháp giải bài toán ngược động lực học bay như một dạng của bài toán biên, tức là phải tìm các tham số điều khiển chuyển động của KCB bao gồm lực đẩy động cơ, góc tấn, góc kren phụ thuộc thời gian sao cho KCB thực hiện đúng theo quỹ đạo bay mong muốn. Quỹ đạo của KCB được xác định

dựa vào các điều kiện biên là các trạng thái pha điểm đầu, điểm cuối và thời gian KCB thực hiện quỹ đạo đó. Để lấy ví dụ minh họa, tác giả tiến hành lập trình, tính toán các tham số điều khiển kể trên cho một mẫu tên lửa giả định.

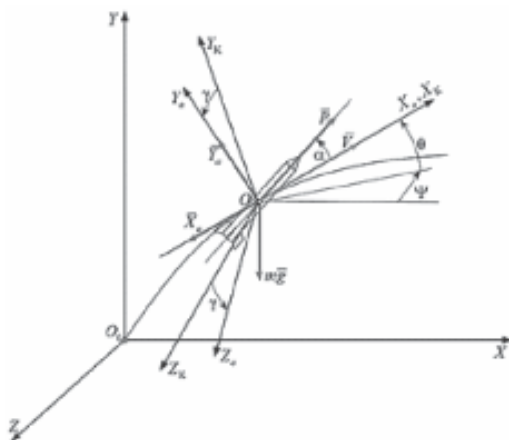
2. MÔ HÌNH TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN NGƯỢC ĐỘNG LỰC HỌC BAY

2.1. Thiết lập mô hình toán

Theo [2], mô hình trạng thái pha KCB được biểu diễn thông qua hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(n_x - \sin \theta); \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V}(n_y \cos \gamma - \cos \theta); \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{V \cos \theta} n_y \sin \gamma; \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \Psi; \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \theta; \quad \frac{dz}{dt} = -V \cos \theta \sin \Psi; \\ n_x &= (P \cos \alpha - X_a)/(mg); \quad n_y = (P \sin \alpha + Y_a)/(mg). \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó: V - Độ lớn véc-tơ vận tốc; n_x, n_y - Các thành phần của véc-tơ quá tải theo các trục X_a, Y_a của hệ tọa độ vận tốc; γ - Góc kren; θ - Góc nghiêng quỹ đạo; Ψ - Góc hành trình; x, y, z - Tọa độ tâm khối KCB trong hệ tọa độ mặt đất; P - Lực đẩy động cơ; α - Góc tấn; X_a, Y_a - Lực cản chính diện và lực nâng (hình 1); g - Gia tốc trọng trường; m - Khối lượng KCB: $m = m_0 - |\dot{m}|t$.



Hình 1. Các lực tác dụng lên KCB khi chuyển động

Hệ phương trình (1) chứa chín tham số phụ thuộc thời gian, trong đó sáu tham số V, θ, Ψ, x, y, z đặc trưng cho trạng thái pha của KCB, ba tham số còn lại P, α, γ là các hàm điều. Bài toán ngược động lực học bay được phát biểu như sau:

Cho trạng thái không gian pha của KCB có điều khiển ở thời điểm đầu ($t_0 = 0$):

$$x(0) = x_0; y(0) = y_0; z(0) = z_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad (2)$$

hãy xác định các hàm điều khiển $P(t), \alpha(t), \gamma(t)$ sao cho sau khoảng thời gian $t_k = T$, KCB di chuyển từ điểm đầu đã cho vào điểm cuối của quỹ đạo có không gian pha cho trước:

$$x(t_k) = x_T; y(t_k) = y_T; z(t_k) = z_T; \dot{x}(t_k) = \dot{x}_T; \dot{y}(t_k) = \dot{y}_T; \dot{z}(t_k) = \dot{z}_T. \quad (3)$$

Với cách phát biểu này thì đây là bài toán hai điều kiện biên, để giải nó sau đây ta sử dụng phương pháp dựa trên khái niệm bài toán ngược động lực học.

2.2. Phương pháp giải

Giả sử cho trước một quỹ đạo cơ sở nào đó $x^*(t), y^*(t), z^*(t)$ thỏa mãn các điều kiện biên (3), (4), các hàm này liên tục, khả vi bậc hai theo thời gian t trên đoạn $t \in [0, t_k]$, để xác định các hàm $P(t), \alpha(t), \gamma(t)$, ta thế chúng vào vị trí của $x(t), y(t), z(t)$ trong hệ (1) và loại bỏ các biến trung gian. Từ ba phương trình sau của hệ (1), ta có:

$$\sin \theta = \dot{y}/V; \quad \sin \Psi = -\dot{z}/(V \cos \theta); \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (4)$$

Từ hai biểu thức đầu của (4), ta có:

$$\theta(t) = \arcsin(\dot{y}/V); \quad \Psi(t) = \arcsin(-\dot{z}/(V \cos \theta)) \quad (5)$$

Để xác định các thành phần của véc-tơ quá tải và góc kren $\gamma(t)$, trước hết cần xác định giá trị các đạo hàm $\dot{\theta}(t)$ và $\dot{\Psi}(t)$:

$$\dot{\theta}(t) = (\dot{V}_y - \dot{V}_x) / (V^2 \cos \theta); \dot{\Psi}(t) = (\dot{x}_z - \dot{z}_x) \cos^2 \Psi / \dot{x}^2 \quad (6)$$

Xem $\dot{V}(t), \dot{\theta}(t)$ và $\dot{\Psi}(t)$ là đã biết, từ ba phương trình đầu của (1), ta có:

$$n_{x_z} = \sin \theta + (\dot{V} / g); n_{y_z} = (V\dot{\theta} / g + \cos \theta) / \cos \gamma; \operatorname{tg} \gamma = (\dot{\Psi} \cos \theta) / (\dot{\theta} + g \cos \theta / V) \quad (7)$$

Biểu thức sau cùng của (7) trực tiếp xác định một trong những hàm điều khiển cần tìm. Hai hàm còn lại $P(t)$ và $\alpha(t)$ có thể tìm được từ các công thức sau:

$$P(t) = \sqrt{(mg n_{x_z} + X_a)^2 + (mg n_{y_z} - Y_a)^2}; \alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{mg n_{y_z}}{mg n_{x_z}} \quad (8)$$

Những công thức nêu trên của các hàm điều khiển đảm bảo lời giải của bài toán biên đặt ra.

Sau đây, ta xem xét một phương pháp xây dựng quỹ đạo cơ sở chuyển động KCB đơn giản theo trình tự như sau.

Thay tham số thời gian thực t bằng thời gian tương đối τ trong các phép biến đổi toán học:

$$\tau = (t - t_0) / (t_k - t_0) = (t - t_0) / T$$

Kết quả cuối cùng ta phải nhận được các hàm số:

$$x(t(\tau)) = F_x(\tau); y(t(\tau)) = F_y(\tau); z(t(\tau)) = F_z(\tau) \quad (9)$$

Giả thiết rằng, các hàm số $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ phụ thuộc vào các hàm cơ sở. Thí dụ đơn giản nhất có thể coi $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ là những đa thức có dạng:

$$F_x(\tau) = \sum_{i=0}^3 k_i \varphi_{xi}(\tau); F_y(\tau) = \sum_{i=0}^3 l_i \varphi_{yi}(\tau); F_z(\tau) = \sum_{i=0}^3 n_i \varphi_{zi}(\tau) \quad (10)$$

Trong đó, k_i, l_i, n_i ($i = 0, \dots, 3$) là các hệ số hằng số; còn $\varphi_{xi}(\tau), \varphi_{yi}(\tau), \varphi_{zi}(\tau)$ ($i = 0, \dots, 3$) là các hàm cơ sở tuyến tính độc lập. Để đơn giản hóa quá trình tính toán, các hàm cơ sở được chọn tối giản nhất có thể nhưng vẫn đảm bảo các hàm số $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ liên tục và ít nhất là khả vi bậc hai trên đoạn $[0, 1]$. Trong trường hợp riêng, có thể chọn các hàm cơ sở là các hàm mũ dạng:

$$\varphi_{x0}(\tau) = 1; \varphi_{x1}(\tau) = \tau; \varphi_{x2}(\tau) = \tau^2; \varphi_{x3}(\tau) = \tau^3 \quad (11)$$

Hoặc cũng có thể chọn kết hợp hàm mũ và hàm lượng giác dạng:

$$\varphi_{x0}(\tau) = 1; \varphi_{x1}(\tau) = \tau; \varphi_{x2}(\tau) = \sin(\pi \tau); \varphi_{x3}(\tau) = \cos(\pi \tau) \quad (12)$$

Các hệ số k_i, l_i, n_i ($i = 0, \dots, 3$) có thể tìm như sau.

Lấy đạo hàm các hàm số (10) theo τ , ta có:

$$\dot{F}_x(\tau) = \sum_{i=0}^3 k_i \dot{\varphi}_{xi}(\tau); \dot{F}_y(\tau) = \sum_{i=0}^3 l_i \dot{\varphi}_{yi}(\tau); \dot{F}_z(\tau) = \sum_{i=0}^3 n_i \dot{\varphi}_{zi}(\tau) \quad (13)$$

Các đa thức $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ và các đạo hàm của nó phải thỏa mãn các điều kiện biên:

$$\begin{aligned} F_x(0) &= x(t_0) = x_0; F_y(0) = y(t_0) = y_0; F_z(0) = z(t_0) = z_0; \\ F_x(1) &= x(t_k) = x_T; F_y(1) = y(t_k) = y_T; F_z(1) = z(t_k) = z_T; \\ \dot{F}_x(0) &= \dot{x}(t_0)T = \dot{x}_0T; \dot{F}_y(0) = \dot{y}(t_0)T = \dot{y}_0T; \dot{F}_z(0) = \dot{z}(t_0)T = \dot{z}_0T; \\ \dot{F}_x(1) &= \dot{x}(t_k)T = \dot{x}_T; \dot{F}_y(1) = \dot{y}(t_k)T = \dot{y}_T; \dot{F}_z(1) = \dot{z}(t_k)T = \dot{z}_T; \end{aligned}$$

Trên cơ sở các biểu thức này, ta có thể thành lập ba hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^3 k_i \varphi_{xi}(0) = x_0 \\ \sum_{i=0}^3 k_i \dot{\varphi}_{xi}(0) = \dot{x}_0T \\ \sum_{i=0}^3 k_i \varphi_{xi}(1) = x_T \\ \sum_{i=0}^3 k_i \dot{\varphi}_{xi}(1) = \dot{x}_T \end{cases} \begin{cases} \sum_{i=0}^3 l_i \varphi_{yi}(0) = y_0 \\ \sum_{i=0}^3 l_i \dot{\varphi}_{yi}(0) = \dot{y}_0T \\ \sum_{i=0}^3 l_i \varphi_{yi}(1) = y_T \\ \sum_{i=0}^3 l_i \dot{\varphi}_{yi}(1) = \dot{y}_T \end{cases} \begin{cases} \sum_{i=0}^3 n_i \varphi_{zi}(0) = z_0 \\ \sum_{i=0}^3 n_i \dot{\varphi}_{zi}(0) = \dot{z}_0T \\ \sum_{i=0}^3 n_i \varphi_{zi}(1) = z_T \\ \sum_{i=0}^3 n_i \dot{\varphi}_{zi}(1) = \dot{z}_T \end{cases} \quad (14)$$

Hệ phương trình (14) bao gồm 12 phương trình chứa 12 ẩn ($k_0, k_1, k_2, k_3, l_0, l_1, l_2, l_3$) và (n_0, n_1, n_2, n_3) có thể giải được.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Sau đây, ta xem xét giải bài toán ngược động lực học bay cho một tên lửa có điều khiển X giả định.

Thông số tên lửa X: $m_0 = 780\text{kg}$; $\dot{m} = 20\text{ kg/s}$; $S = 0,12\text{m}^2$; $T = 20\text{s}$.

Các điều kiện biên:

1. $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $z_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 10\text{m/s}$; $\dot{y}_0 = 60\text{m/s}$; $\dot{z}_0 = 5\text{m/s}$.
2. $x_T = 1000\text{m}$; $y_T = 10000\text{m}$; $z_T = 500\text{m}$; $\dot{x}_T = 50\text{m/s}$; $\dot{y}_T = 1000\text{m/s}$; $\dot{z}_T = 30\text{m/s}$.

Giải bài toán với hai phương án quỹ đạo cơ sở có dạng (10) dựa trên các hàm cơ sở (11) - phương án 1 và ở phương án 2 - hàm cơ sở (12), các điều kiện ban đầu của tên lửa và các điều kiện biên là hoàn toàn như nhau. Ở các đồ thị dưới đây, tham số khảo sát theo phương án 1 thể hiện bằng nét liền, phương án 2 - nét đứt. Áp dụng phương pháp được trình bày trong mục 2.2, ta nhận được quỹ đạo cơ sở của hai phương án khảo sát.

Phương án 1:

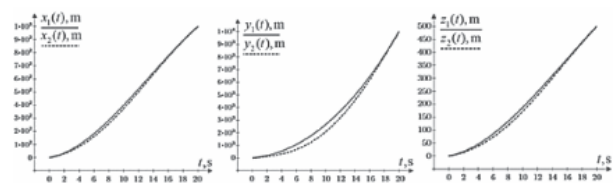
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 10t + 4t^2 - 0,1t^3; y_1(t) = 60t + 19t^2 + 0,15t^3; \\ z_1(t) &= 5t + 1,75t^2 - 0,0375t^3 \end{aligned} \quad (15)$$

Phương án 2:

$$\begin{cases} x_2(t) = 233,3 + 27,6t - 117,5\sin(0,15t) - 233,3\cos(0,15t) \\ y_2(t) = -113,5 + 533,6t - 3157,1\sin(0,15t) + 113,5\cos(0,15t) \\ z_2(t) = 89,8 + 16,6t - 77,4\sin(0,15t) - 89,8\cos(0,15t) \end{cases} \quad (16)$$

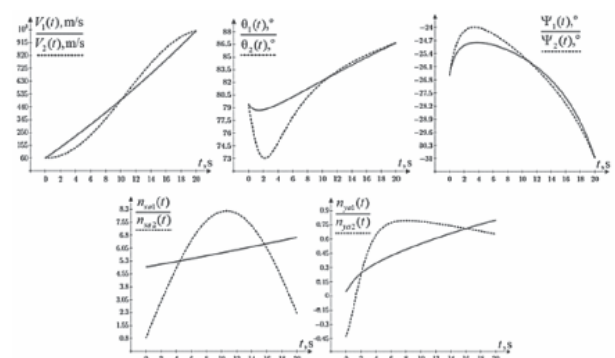
Đồ thị của chúng được thể hiện trên hình 2.

Không khó để nhận thấy rằng, quỹ đạo của tên lửa có thể được mô tả bởi các hàm khác nhau nhưng chúng đều thỏa mãn các điều kiện biên tại điểm đầu và điểm cuối của nó. Điều đó khẳng định rằng, về mặt lý thuyết, nếu cho trước trạng thái không gian pha ở điểm đầu và điểm cuối thì tồn tại vô số quỹ đạo thỏa mãn điều kiện biên đó.



Hình 2. Quỹ đạo cơ sở mong muốn

Với quỹ đạo cơ sở vừa nhận được, tiến hành giải bài toán biên động lực học bay của tên lửa trên cơ sở những khái niệm bài toán ngược được trình bày trong mục 2.2, ta thu được quy luật thay đổi các tham số động lực học của tên lửa được thể hiện trên hình 3.

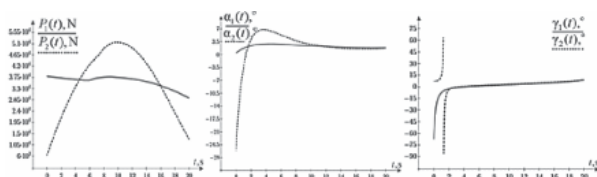


Hình 3. Quy luật biến đổi các tham số động lực học

Đồ thị hình 3 cho thấy, các tham số động lực học ở hai phương án khảo sát không khác biệt nhau quá nhiều, đều biến đổi liên tục, quá tải dọc không quá lớn ($0,8 \div 8,3$) đảm bảo cho các thiết bị điện tử hoạt động tốt, quá tải ngang

nhỏ (nhỏ hơn 1) không phá vỡ độ bền kết cấu giữa các khoang của tên lửa. Tuy nhiên, trong phương án 1 khoảng biến đổi của các tham số này là nhỏ hơn so với phương án 2, vì vậy về mặt động lực học và điều khiển thì phương án 1 tốt hơn phương án 2.

Đồ thị của các hàm điều khiển $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ được thể hiện trên hình 4. Dễ thấy, $P(t)$ và $\alpha(t)$ ở phương án 1 biến đổi trong khoảng nhỏ hơn so với ở phương án 2, còn $\gamma(t)$ ở phương án 2 lại thay đổi rất nhanh (từ 0÷2 giây đầu tiên), xuất hiện điểm gián đoạn, rõ ràng rằng, theo quan điểm lý thuyết điều khiển thì phương án 1 tốt hơn phương án 2. Tuy nhiên, về mặt kỹ thuật, để giữ được lực đẩy động cơ ổn định, thay đổi trong khoảng nhỏ là bài toán không hề dễ dàng.



Hình 4. Quy luật biến đổi các hàm điều khiển

4. KẾT LUẬN

Như vậy, bài toán ngược động lực học bay có thể giải được như là một dạng của bài toán biên. Nếu biết trước trạng thái không gian

pha tại điểm xuất phát và tại điểm mà sau một khoảng thời gian ta mong muốn tên lửa đạt được trạng thái không gian pha yêu cầu tại đó, ta sẽ tìm được quy luật biến đổi các hàm điều khiển: lực đẩy động cơ, góc tấn, góc kren để tên lửa thực hiện được nhiệm vụ đó.

Việc giải bài toán này, có ý nghĩa quan trọng trong thiết kế chế tạo tên lửa có điều khiển cũng như trong xây dựng chương trình điều khiển cho máy bay và các thiết bị không người lái (UAV) để chúng có thể thực hiện được những quỹ đạo mong muốn cho trước.❖

Ngày nhận bài: **16/3/2026**

Ngày phản biện: **25/3/2026**

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Борисенко А. Д., Борисенко Н. Д., Маничев В. Б., “О некоторых приближенных методах решения обратной задачи внешней баллистики”. Электронный журнал «Инженерный весник», МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, №7, с. 541-551.
- [2]. Крутько П.Д., “Абратные задачи динамики управляемых систем (линейные модели)”, М.: Наука (1987).
- [3]. Тараненко В.Т., Момджи В.Г., “Прямой вариационный метод в краевых задачах динамики полета”, М.: Машиностроение (1986).