

XÂY DỰNG CHƯƠNG TRÌNH VẼ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC CHO KẾT CẤU DẦM LIÊN TỤC BẰNG ỨNG DỤNG LẬP TRÌNH MATLAB

BUILD A PROGRAM TO DRAW INTERNAL FORCE DIAGRAMS FOR CONTINUOUS BEAM STRUCTURES USING MATLAB PROGRAMMING

ThS. Đào Văn Lập*, ThS. Phạm Thị Thanh

Khoa Cơ sở cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

*Email: vanlap@vimaru.edu.vn

TÓM TẮT

Bài toán về hệ dầm liên tục thường gặp trong xây dựng và công trình giao thông, đó đa phần đều là các bài toán phức tạp có nhiều bậc siêu tĩnh và đòi hỏi khối lượng tính toán lớn. Hiện nay, phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) đã và đang được sử dụng rất rộng rãi trong tính toán, mô phỏng cơ khí, kỹ thuật... Tuy nhiên, khi áp dụng phương pháp này gặp các khó khăn về mặt toán học. Bài báo này đưa ra ý tưởng về việc ứng dụng phương pháp PTHH kết hợp với ngôn ngữ lập trình Matlab để đi tiến hành giải quyết vấn đề vẽ biểu đồ nội lực cho hệ dầm liên tục một cách chính xác và nhanh chóng.

Từ khóa: Phương pháp PTHH; Matlab; Biểu đồ nội lực; Dầm liên tục.

ABSTRACT

Problems involving continuous beam systems are common in construction and transportation engineering. These are often complex problems with multiple degrees of static indeterminacy and require significant computational effort. Currently, the Finite Element Method (FEM) is widely used in mechanical and engineering calculations and simulations. However, applying this method presents mathematical challenges. This paper proposes an idea for applying the FEM in combination with the Matlab programming language to accurately and quickly solve the problem of plotting internal force diagrams for continuous beam systems.

Keywords: FEM method; Matlab; Internal force diagram; Continuous beam.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong tính toán thực tế về kết cấu thép và các công trình cầu đường, hệ dầm liên tục là bài toán rất phổ biến. Việc giải các bài toán hệ dầm này được thực hiện bởi nhiều phương pháp như sử dụng hệ phương trình 3 mômen hay các phương pháp số... Với việc phát triển mạnh của công nghệ thông tin thì các phương pháp số có nhiều ưu điểm, trong đó phải kể đến phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Đây là phương pháp rất hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, trong đó có việc tính toán giải quyết các bài toán siêu tĩnh của hệ kết cấu nhiều thanh phức tạp. Trong phương pháp PTHH, các dữ liệu đầu vào như sơ đồ tính, sơ đồ tải trọng đều được số hóa, toàn bộ sơ đồ tính được đưa về ma trận độ cứng, sơ đồ tải trọng được đưa về véc tơ tải trọng nút. Việc tính chuyển vị nút còn lại là đi giải phương trình cân bằng dưới dạng ma trận và từ đó ta dựa vào các mối quan hệ để xác định các đại lượng cần tìm [1]. Vấn đề đặt ra là khi gặp những hệ kết cấu lớn có nhiều phần tử thanh, nhiều bậc tự do là các thành phần chuyển vị tại nút sẽ gặp khó về mặt tính toán. Điều đó dẫn đến việc phải kết hợp phần mềm toán vào phương pháp PTHH để phân tích hệ kết cấu được đơn giản hơn [2].

Trên cơ sở phân tích tính năng của các phần mềm lập trình thông dụng, cùng với kinh nghiệm ứng dụng các phần mềm này vào công tác giảng dạy, tác giả nhận thấy việc áp dụng Matlab vào phương pháp PTHH để đi giải quyết bài toán vẽ biểu đồ nội lực cho kết cấu dầm liên tục là rất hữu ích đối với việc tính toán và thiết kế thực tế của các kỹ sư cũng như việc học tập và nghiên cứu của sinh viên. Phần mềm Matlab có các ưu điểm vượt trội với các bài toán ma trận, các bài toán cần được số hóa, cần được lập trình và tự động hóa cao. Phần mềm Matlab trợ giúp cho việc tính toán, vẽ đồ

thị rất ưu việt. Các lệnh của Matlab mạnh và hiệu quả, đặc biệt hữu dụng cho các hệ phương trình tuyến tính hay các bài toán ma trận được gặp nhiều trong phương pháp PTHH [2].

2. NỘI DUNG CƠ BẢN CỦA VẼ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC HỆ DẦM LIÊN TỤC SỬ DỤNG LẬP TRÌNH MATLAB

2.1. Phương pháp PTHH tính nội lực, chuyển vị trong bài toán dầm [1]

Trong phương pháp PTHH - mô hình chuyển vị để phân tích nội lực, chuyển vị được triển khai theo các bước sau:

Rời rạc hóa hệ dầm thành các phần tử thanh, đặt ký hiệu cho các phần tử, các nút và các bậc tự do tương ứng với số chuyển vị tại các nút.

Thiết lập phương trình cân bằng của toàn hệ:

$$[K].\{U\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Trong đó:

$\{U\}$ - Vectơ chuyển vị nút của dầm trong hệ tọa độ chung;

$[K]$ - Ma trận độ cứng của toàn dầm trong hệ tọa độ chung;

$\{F\}$ - Vectơ tải trọng nút của toàn dầm trong hệ tọa độ chung.

Kết hợp với điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định. Ngoài ra phải thỏa mãn điều kiện liên tục tại các nút của hệ kết cấu. Sau khi đưa vào các điều kiện biên, điều kiện liên tục, phương trình cân bằng mới được biểu diễn như sau:

$$[k].\{u\} = \{f\} \quad (2.2)$$

Trong đó:



$\{u\}$ - Được xây dựng từ $\{U\}$ sau khi loại bỏ các thành phần chuyển vị bằng 0;

$[k]$ - Được xây dựng từ $[K]$ sau khi loại bỏ các hàng và cột tương ứng với các chuyển vị bằng 0;

$\{f\}$ - Được xây dựng từ $\{F\}$ sau khi loại bỏ các hàng tương ứng với thành phần chuyển vị bằng 0.

Giải hệ phương trình cân bằng: $\{u\} = [k]^{-1} \cdot \{f\}$

Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vector chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ riêng. Từ đó xác định được nội lực, cũng như biến dạng, ứng suất của điểm bất kỳ trong phần tử nhờ các quan hệ đã có.

2.2. Phần tử dầm trong hệ thanh phẳng [1]

Xét phần tử thanh dầm chịu uốn i - j trong bài toán dầm phẳng, có độ cứng EI , chiều dài L . Tại mỗi nút sẽ có 2 bậc tự do: chuyển vị theo phương vuông góc trục và chuyển vị xoay. Hệ tọa độ riêng của phần tử xy trùng với hệ tọa độ chung XY (Hình 1) với một số công thức cơ bản như sau:



Hình 1. Phần tử thanh dầm [1]

Ma trận độ cứng của phần tử thanh dầm xác định:

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Mô-men tại hai đầu nút phần tử:

$$[M^e] = \begin{Bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^e \\ \theta_1^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

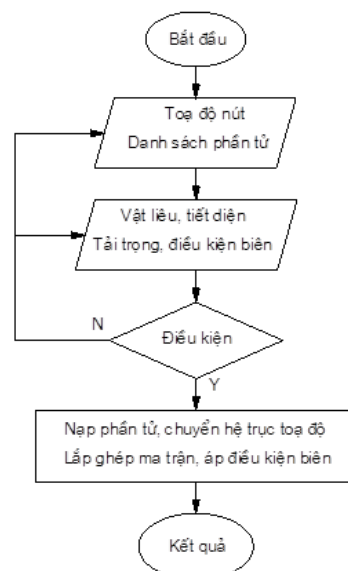
Lực cắt tại hai đầu nút phần tử:

$$[Q^e] = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 12 & 6L & -12 & 6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^e \\ \theta_1^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix}$$

Sau khi xác định được nội lực cho từng phần tử, ta tiến hành bước vẽ biểu đồ nội lực cho dầm.

2.3. Thiết lập trình tự giải hệ dầm liên tục bằng phương pháp PTHH sử dụng lập trình Matlab [2]

Bài toán phân tích vẽ biểu đồ nội lực cho hệ dầm liên tục bằng phương pháp PTHH được tác giả viết chương trình tính toán sử dụng phần mềm Matlab được thực hiện theo sơ đồ khối sau.



Hình 2. Lưu đồ thuật toán của chương trình [2]

2.4. Xây dựng chương trình Matlab vẽ biểu đồ nội lực cho dầm liên tục [3],[4],[5]

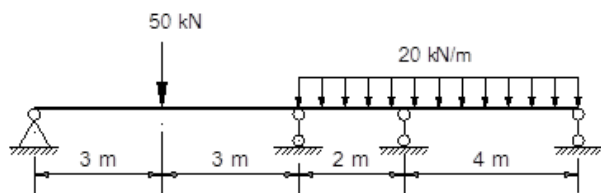
```
noe=4; %SO PT (element)
non=5; %SO NUT (nodes)
nodofpn=3; %SO BTĐ CỦA 1 NUT
nk=0; %SO KHOP NOI
% Ma trận BTĐ
Edof=[1 1 2 3 4 5 6;
      2 4 5 6 7 8 9;
      3 7 8 9 10 11 12;
      4 10 11 12 13 14 15];
% Ma trận độ cứng K và vector tải nút f
K=zeros(non*nodofpn+nk);
f=zeros(non*nodofpn+nk,1);
% Ma trận độ cứng phần tử Ke & ghép ma trận
Ke vào K
% unit kN-m
q=20; P=40;
E=1; A=1e9; I=1;
% Ma trận tính chất Ptư
ep=[E A I; % A là dt MC ngang dầm
    E A I;
    E A I];
% Ma trận tọa độ của Ptư
ex=[0 3;
    3 6;
    6 8;
    8 12]; % MT tọa độ X
ey=[0 0;
    0 0;
    0 0;
    0 0]; % MT tọa độ Y
eq=[0 0;
    0 0;
    0 -q;
    0 -q]; % MT tải trọng phân bố đều [qx qy]
f(5)=-P % Tải tập trung tại nút
for i=1:noe
    [Ke,fe]=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep(i,:),eq(i,:))
    [K,f]=assem(Edof(i,:),K,Ke,f,fe);
end
```

```
K
f
%-----Giải hệ phương trình và tính phản lực
liên kết -
% DK biên
bc=[1 0;2 0;8 0;11 0;14 0]; % Điều kiện biên
[a,r]=solveq(K,f,bc);
%-----Kết quả -----
a %cvti nút
r %phản lực gối
% -----Section forces -----
Ed=extract_ed(Edof,a);
%NOI LUC THANH
es1=beam2s(ex(1,:),ey(1,:),ep(1,:),Ed(1,:),
eq(1,:),6)
es2=beam2s(ex(2,:),ey(2,:),ep(2,:),Ed(2,:),
eq(2,:),6)
es3=beam2s(ex(3,:),ey(3,:),ep(3,:),Ed(3,:),
eq(3,:),6)
es4=beam2s(ex(4,:),ey(4,:),ep(4,:),Ed(4,:),
eq(4,:),7)
% BIEU DO LUC CAT
figure(1)
plotpar=[2 1];
scale=.04;
eldia2(ex(1,:),ey(1,:),es1(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(2,:),ey(2,:),es2(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(3,:),ey(3,:),es3(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(4,:),ey(4,:),es4(:,2),plotpar,scale);
axis([-2 20 -4 4]);
title('SHEAR FORCE DIAGRAM')
% BIEU DO MOMEN
figure(2)
plotpar=[2 1];
scale=.04;
eldia2(ex(1,:),ey(1,:),es1(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(2,:),ey(2,:),es2(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(3,:),ey(3,:),es3(:,2),plotpar,scale);
eldia2(ex(4,:),ey(4,:),es4(:,2),plotpar,scale);
axis([-2 20 -4 6]);
title('MOMENT DIAGRAM')
%----- End -----
```

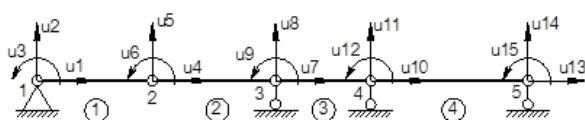


3. VÍ DỤ MINH HỌA

Sử dụng ngôn ngữ lập trình Matlab hãy viết chương trình vẽ biểu đồ nội lực cho hệ dầm liên tục như hình vẽ (Hình 3).

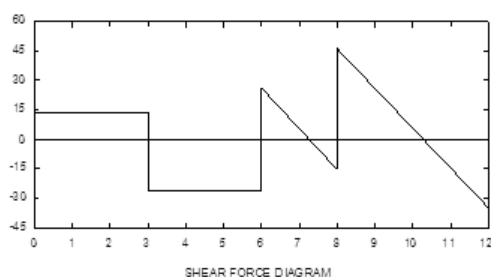


Hình 3. Hệ dầm liên tục

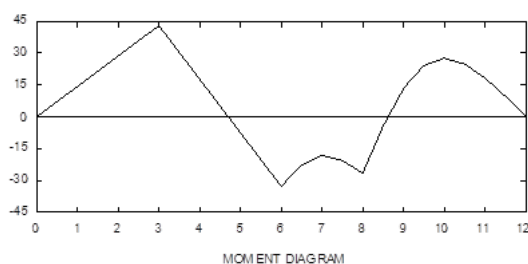


Hình 4. Rời rạc hóa bài toán

Rời rạc hóa hệ kết cấu thành 4 phần tử với các nút và bậc tự do như trên (Hình 4) với các phần tử, nút và bậc tự do của mỗi nút. Sử dụng code Matlab được tác giả viết với các hàm Matlab của dầm liên tục. Kết quả thu được: Biểu đồ lực cắt (Q) và mô-men uốn (M) cho dầm.



Hình 5. Biểu đồ lực cắt Q



Hình 6. Biểu đồ mô-men uốn M

4. KẾT LUẬN

Dựa trên kết quả thu được, nhóm tác giả có một số nhận xét như sau:

Công cụ lập trình Matlab giúp cho việc tính toán và vẽ biểu đồ nội lực cho kết cấu dầm liên tục với tốc độ rất nhanh, có độ chính xác phù hợp với yêu cầu.

Trên cơ sở lý thuyết của phương pháp PTHH cùng với phần mềm Matlab, tác giả đã xây dựng được trình tự sơ đồ thuật toán, các hàm con và viết chương trình Matlab cho bài toán vẽ biểu đồ nội lực hệ dầm liên tục của một ví dụ cụ thể với kết quả tin cậy. Việc ứng dụng lập trình Matlab vào phục vụ việc học tập, giảng dạy cho sinh viên, học viên cao học ngành xây dựng và công trình là rất cần thiết và hữu ích.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: DT25-26.159. ❖

Ngày nhận bài: 10/3/2026

Ngày phản biện: 23/3/2026

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Phạm Văn Đạt, "Tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn". NXB. Xây dựng, 2017.
- [2]. Nguyễn Thời Trung, Nguyễn Xuân Hùng, "Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng MATLAB". NXB. Xây dựng, 2015.
- [3]. P.I. Kattan, "MATLAB Guide to Finite Elements". Springer, 2007.
- [4]. A.J.M. Ferreira, "MATLAB Codes for Finite Element Analysis". Springer, 2009.
- [5]. CALFEM, "Finite Element Analysis Using MATLAB Toolbox". Lund University, 1999.