

ỔN ĐỊNH CỦA VÒNG ĐÀN HỒI CHỊU TẢI TRỌNG THỦY TĨNH

BUCKLING OF INEXTENSIBLE RINGS SUBJECT TO HYDROSTATIC LOADING

Hoàng Minh Tuấn

Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy lợi, Bộ Nông nghiệp và Môi trường

Email: tmhoang@tlu.edu.vn

TÓM TẮT

Chúng tôi nghiên cứu hiện tượng mất ổn định của các vòng đàn hồi làm từ các sợi phi đối xứng và chịu tải thủy tĩnh. Đối với các vòng đàn hồi làm từ các sợi đối xứng, chúng mất ổn định thông qua biến dạng ngoài mặt phẳng tại các giá trị tải trọng tới hạn nhỏ hơn so với các giá trị đã biết trước đây. Đối với các vòng đàn hồi làm từ các sợi phi đối xứng, chúng mất ổn định thông qua sự kết hợp giữa biến dạng trong mặt phẳng và ngoài mặt phẳng tại các giá trị tải trọng tới hạn nhỏ hơn so với các giá trị tới hạn mà hiện tượng mất ổn định sẽ xảy ra nếu vòng dây làm từ sợi đối xứng. Tuy nhiên, hiệu ứng mất ổn định có thể được giảm bớt bằng cách tăng độ cứng xoắn tương đối so với độ cứng uốn.

Từ khóa: Vòng đàn hồi; Mất ổn định; Tải trọng thủy tĩnh; Lý thuyết thanh.

ABSTRACT

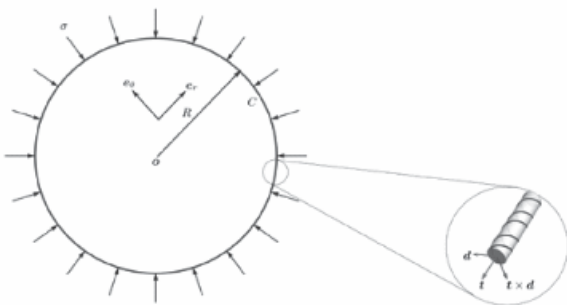
We study buckling of inextensible rings made from chiral filaments and subject to hydrostatic loading. For circular rings made from filaments without chirality, we find that they lose instability via out-of-plane bifurcation at critical values of loading smaller than those published. For circular rings made from filaments with chirality, they lose instability via coupling between in-plane and out-of-plane bifurcation at critical values of loading smaller than those at which bifurcation would happen without chirality. The destabilizing effect of chirality, however, can be reduced by increasing the twisting rigidity relative to the bending rigidity.

Keywords: Elastic ring; Buckling; Hydrostatic loading; Rod theory.

1. TỔNG QUAN

Hiện tượng mất ổn định của các vòng đàn hồi đóng vai trò quan trọng trong cơ học kết cấu, bắt đầu từ công trình tiên phong của Maurice Lévy vào cuối thế kỷ 19, khi nghiên cứu hiện tượng mất ổn định do uốn của vỏ trụ dài vô hạn chịu áp suất. Mất ổn định do uốn của các vòng dây có nhiều ứng dụng bao gồm thiết kế các vòng dây nano trong các thiết bị cấu trúc nano, thiết kế vỏ trụ trong các cấu trúc thành mỏng như nồi hơi, bình chịu áp lực, và nhiều ứng dụng khác.

Mất ổn định của các vòng đàn hồi dưới tác dụng của ba loại tải trọng chính gồm áp suất thủy tĩnh, tải trọng hướng tâm, và tải trọng cố định là một vấn đề quan trọng trong thiết kế kết cấu, vì các tải trọng phức tạp như sóng xung kích từ vụ nổ có thể được phân tích thành các loại tải trọng này. Mất ổn định của các vòng đàn hồi dưới tải trọng cố định – loại tải trọng luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường giữa trong cấu hình chưa biến dạng – đã được nghiên cứu kỹ lưỡng [1].



Hình 1. Vòng đàn hồi làm từ sợi phi đối xứng chịu tải trọng thủy tĩnh.

Mất ổn định của các vòng đàn hồi dưới tải trọng hướng tâm – loại tải trọng luôn hướng về tâm cong ban đầu của vòng – cũng đã được nghiên cứu [2] và được kiểm chứng thực nghiệm gần đây [3]. Tuy nhiên, tất cả các

tài liệu trước đó chỉ xem xét mất ổn định trong mặt phẳng. Dựa trên nghiên cứu [4] về hiện tượng mất ổn định của vòng nhót đàn hồi dưới tải trọng hướng tâm – cho thấy kiểu uốn xoắn chiếm ưu thế trong mất ổn định. Gần đây, tác giả chỉ ra rằng các vòng đàn hồi mất ổn định thông qua mất ổn định ngoài mặt phẳng tại giá trị tới hạn của tải trọng nhỏ hơn so với mất ổn định trong mặt phẳng, từ đó khẳng định tầm quan trọng của mất ổn định ngoài mặt phẳng trong phân tích hiện tượng mất ổn định của vòng đàn hồi.

Ngược lại, mất ổn định của vòng đàn hồi dưới áp suất thủy tĩnh – loại tải trọng luôn vuông góc với tiếp tuyến của đường giữa của vòng ở cấu hình biến dạng – lại ít được nghiên cứu hơn [5], và ngay cả trong các nghiên cứu gần đây như [3], chỉ xem xét mất ổn định trong mặt phẳng. Trong nghiên cứu này, chúng tôi cho phép cả hai dạng mất ổn định và cho thấy rằng vòng đàn hồi dưới áp suất thủy tĩnh sẽ mất ổn định ngoài mặt phẳng tại giá trị tới hạn nhỏ hơn nhiều so với khi chỉ xem xét mất ổn định trong mặt phẳng.

Tính phi đối xứng trong các vòng đàn hồi đã được quan sát ở nhiều cấu trúc trên các quy mô khác nhau và tạo ra nhiều hiện tượng thú vị như sự liên kết giữa xoắn và giãn, hoặc giữa xoắn và uốn của sợi. Trong khi hiện tượng liên kết xoắn-giãn đã được nghiên cứu kỹ lưỡng [6] thì liên kết xoắn-uốn chỉ mới được nghiên cứu gần đây trong [7], mặc dù khái niệm này đã được giới thiệu trước đó. Lấy cảm hứng từ công trình [8] sử dụng liên kết xoắn-uốn để lý giải hiện tượng mất ổn định gấp khúc trong các vòng ADN, chúng tôi nghiên cứu ảnh hưởng của liên kết này đến hiện tượng mất ổn định của các vòng đàn hồi dưới tải trọng thủy tĩnh. Chúng tôi phát hiện rằng các vòng đàn hồi có tính phi đối xứng sẽ biểu hiện sự liên kết giữa



mất ổn định trong và ngoài mặt phẳng tại giá trị tới hạn nhỏ hơn so với khi không có tính phi đối xứng.

2. LÝ THUYẾT ỔN ĐỊNH VÒNG ĐÀN HỒI

2.1. Lý thuyết thanh mảnh

Chúng tôi nghiên cứu vòng đàn hồi làm từ sợi dây phi đối xứng với đường tâm C và chịu tải trọng thủy tĩnh như hình vẽ 1. Phương trình của đường C trước khi mất ổn định có dạng:

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1)$$

Trong đó, $\mathbf{e}_r$ là véc tơ đơn vị theo hướng bán kính và θ là góc cực. Gọi u, v, w là các chuyển vị dọc theo phương tiếp tuyến, phương bán kính và phương vuông góc với vòng đàn hồi, vị trí của một điểm vật liệu trên đường C sau khi mất ổn định có dạng:

$$\xi = (1+v)\mathbf{e}_r + u\mathbf{e}_\theta + w\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

Trong đó, $\mathbf{e}_\theta$ là véc tơ đơn vị tiếp tuyến với đường C. Độ cong và độ xoắn của vòng đàn hồi có dạng:

$$\kappa^2 = (1+2u' + v - v')^2 + (u'' - u + 2v')^2 + w'^2, \quad (3)$$

$$\omega = w'(1+u' - u'' - 2v'') + w''(v''' - 2v' - 3u'') + w'''(1+v'' - u') + \psi',$$

Trong đó, ψ là góc xoay của tiết diện của vòng đàn hồi. Năng lượng biến dạng của vòng đàn hồi là:

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\kappa^2 + \alpha\omega^2 + 2\eta\omega\kappa \cos\psi) d\theta \quad (4)$$

Với α tỷ số của độ cứng xoắn so với độ cứng uốn và η là tham số đặc trưng cho tính phi đối xứng của vòng đàn hồi. Công của tải trọng thủy tĩnh đặt lên vòng đàn hồi là:

$$W = -v \int_0^{2\pi} [v - uv' + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)] d\theta \quad (5)$$

Thế năng tổng của vòng đàn hồi chịu tải trọng thủy tĩnh như vậy có dạng:

$$E = V - W \quad (6)$$

2.2. Điều kiện cân bằng của vòng đàn hồi

Điều kiện cân bằng thu được bằng cách triệt tiêu biến phân cấp một của hàm thế năng tổng của vòng đàn hồi. Biến phân cấp một của năng lượng biến dạng của vòng đàn hồi có dạng:

$$\delta V = \int_0^{2\pi} [(\kappa + \eta\omega \cos\psi)\delta\kappa + (\alpha\omega + \eta\kappa \cos\psi)\delta\omega - \eta\omega\kappa \sin\psi\delta\psi] d\theta \quad (7)$$

Biến phân cấp một của công của tải trọng thủy tĩnh đặt lên vòng đàn hồi là:

$$\delta W = -v \int_0^{2\pi} [(1+(u'+v))\delta v + (u-v')\delta u + w\delta w] d\theta \quad (8)$$

Sử dụng biểu thức biến phân (7) và (8) để tìm biến phân cấp một của thế năng tổng (6) của vòng đàn hồi và triệt tiêu biến phân này, chúng tôi thu được điều kiện cân bằng:

$$\begin{cases} \lambda(u-v') - (\lambda(1+v+u'))' = \lambda(1+v+u')' + (\lambda(u-v'))' + v = 0, \\ (\lambda w')' = (\alpha\omega + \eta\kappa \cos\psi)' + \eta\kappa\omega \sin\psi = 0. \end{cases} \quad (9)$$

2.3. Điều kiện mất ổn định của vòng đàn hồi

Bây giờ chúng ta nghiên cứu ổn định của vòng đàn hồi có cấu hình cân bằng ổn định như sau:

$$u = v = w = 0, \quad \kappa = \omega = \psi = 0. \quad (10)$$

Tuyến tính hóa điều kiện cân bằng (9) quanh cấu hình cân bằng ổn định (10), chúng tôi thu được điều kiện để cấu hình mất cân bằng phải thoả mãn:

$$\begin{cases} \alpha(w_1' + w_1'' + \psi_1') + \eta(u_1' + u_1'') = 0, \\ \nu w_1' - \eta(u_1' + u_1'') + (1 + \nu)w_1'' + w_1''' = 0, \\ -(\nu + 1)u_1' - (\nu + 2)u_1'' - u_1''' - \eta(2w_1'' + 3w_1''' + w_1^{(6)} + \psi_1' + \psi_1'') = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Do tính đối xứng của vòng đàn hồi, chúng tôi giả sử cấu hình mất cân bằng có dạng sau:

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \sin n\theta, \\ w_1 = b_1 \sin n\theta, \\ \psi_1 = c_1 \sin n\theta. \end{cases} \quad (12)$$

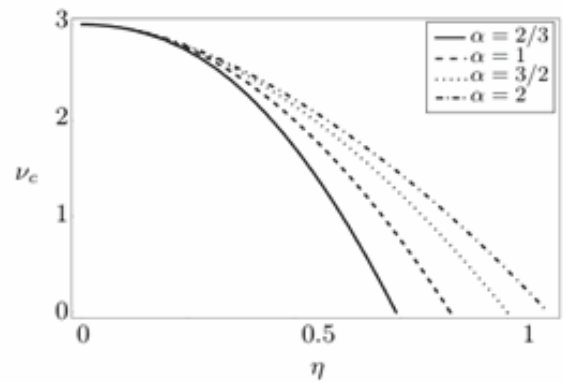
Thay (12) vào (11), ta thu được một hệ phương trình thuần nhất cho 3 ẩn (a_1 , b_1 , c_1). Cấu hình cân bằng ổn định (10) sẽ mất ổn định nếu hệ phương trình thuần nhất nói trên có nghiệm không tầm thường. Triệt tiêu định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình này, chúng tôi thu được điều kiện mất ổn định như sau:

$$[(n^2 - 1)(1 - \frac{\eta^2}{\alpha}) - \nu][n^2 - \nu] = 0. \quad (13)$$

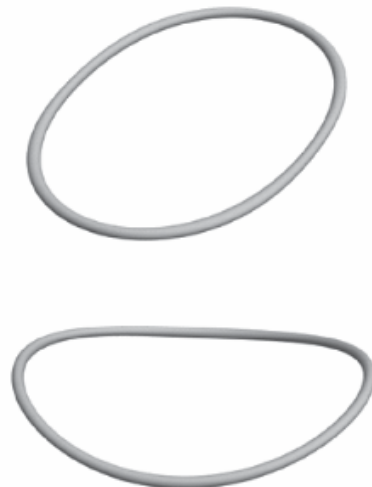
3. KẾT QUẢ

Đồ thị thể hiện sự phụ thuộc của tải trọng thủy tĩnh tới hạn (13) vào tính phi đối xứng và vào tỷ số xoắn-uốn được trình bày trong Hình vẽ 2. Từ hình này, ta thấy khi $\eta = 0$, tức là vòng đàn hồi là đối xứng thì giá trị tới hạn nhỏ nhất của ν không phụ thuộc vào tỷ số xoắn-uốn và bằng 3. Tại giá trị tới hạn của tải trọng, vòng đàn hồi biến dạng thành vòng phẳng không tròn như minh họa trong hình vẽ thứ 3 (hình vẽ trên). Ngoài ra, khi $\eta \neq 0$, tức là vòng đàn hồi là phi đối xứng, ta thấy rằng tính phi đối xứng có ảnh hưởng giống nhau đến hiện tượng mất ổn định của vòng đàn hồi. Cụ thể, với một giá trị của tỷ số xoắn-uốn cho trước, đường cong biểu thị sự phụ thuộc của tải trọng thủy tĩnh tới hạn (13) là đối xứng qua trục tung phản ánh thực tế rằng các giá trị tới hạn của ν

chỉ phụ thuộc vào mức độ phi đối xứng chứ không phụ thuộc vào kiểu phi đối xứng, bất kể đó là phi đối xứng trái $\eta < 0$ hay phi đối xứng phải $\eta > 0$. Mặt khác, đường cong biểu thị sự phụ thuộc của tải trọng thủy tĩnh tới hạn (13) giảm đơn điệu khi mức độ phi đối xứng tăng, điều này hàm ý rằng tính phi đối xứng có tác dụng làm mất ổn định và dẫn đến hiện tượng rẽ nhánh xảy ra tại các giá trị tới hạn của ν thấp hơn so với trường hợp các vòng đàn hồi được làm từ sợi đối xứng.



Hình 2. Sự phụ thuộc của tải trọng thủy tĩnh tới hạn vào tính phi đối xứng và vào tỷ số xoắn-uốn



Hình 3. Hình dáng của vòng đàn hồi sau khi mất ổn định cho hai trường hợp vòng đối xứng (bên trên) và phi đối xứng (bên dưới)

Hơn nữa, tại giá trị tới hạn của tải trọng, vòng đàn hồi biến dạng thành vòng không phẳng như minh họa trong hình vẽ thứ 3 (hình vẽ dưới). Cuối cùng, đường cong biểu thị sự phụ thuộc của tải trọng thủy tĩnh tới hạn (13) tương ứng với một giá trị nhỏ của tỷ số xoắn-uốn sẽ nằm dưới các đường cong tương ứng với các giá trị lớn hơn của tỷ số xoắn-uốn, cho thấy ảnh hưởng giảm thiểu tính mất ổn định của tỷ số xoắn-uốn α . Do đó, ta đi đến kết luận hợp lý về mặt trực giác rằng việc tăng độ cứng xoắn so với độ cứng uốn sẽ giúp chống lại ảnh hưởng có thể gây mất ổn định do tính phi đối xứng.

4. KẾT LUẬN

Chúng tôi vừa sử dụng cách tiếp cận biến phân để nghiên cứu ổn định của vòng đàn hồi phi đối xứng chịu tải trọng thủy tĩnh. Với vòng đàn hồi đối xứng, giá trị tới hạn của tải trọng thủy tĩnh là 3 và vòng đàn hồi biến dạng thành vòng phẳng không tròn. Với vòng đàn hồi phi đối xứng, mặt khác, giá trị tới hạn của tải trọng thủy tĩnh nhỏ hơn 3 và phụ thuộc vào mức độ phi đối xứng cũng như vào tỷ số xoắn-uốn của vòng đàn hồi. Tại giá trị tới hạn (<3) của tải trọng, vòng đàn hồi biến dạng thành vòng không phẳng. ❖

Ngày nhận bài: 02/4/2025

Ngày phản biện: 14/4/2025

Tài liệu tham khảo:

- [1]. J.Singer, C. Babcock, “On the buckling of rings under constant directional and centrally directed pressure”. Journal of Applied Mechanics, 37 (1) (1970), 215-218.
- [2]. E. Albano, P. Seidel, “Bifurcation of rings under concentrated centrally directed loads”. ASME Journal of Applied Mechanics, 40 (2) (1973), 553-558.
- [3]. M. Gaibotti et. al., “Effects of different loading on the bifurcation of annular elastic rods”. International Journal of Nonlinear Mechanics, 165 (2024).
- [4]. M. Naschie and A. Nashai, “Influence of Loading Behavior on the Post Buckling of Circular Rings”. AIAA Journal, 17 (2) (1976), 266-267
- [5]. P. Seidel, E. Albano, “Bifurcation of circular rings under normal concentrated loads”. ASME Journal of Applied Mechanics, 40 (1) (1973), 233-238.
- [6]. T. Healey, C. Papdopoulos, “Bifurcation of hemitropic elastic rods under axial thrust”. Quarterly of Applied Mathematics LXXI (2013), 729-753.
- [7]. Hoang Minh Tuan, “Influence of chirality on buckling and initial postbuckling of inextensible rings subject to central loadings”. International Journal of Solids and Structures, 172-173 (2019), 97-109.
- [8]. Z. Wei et.al., “Kink instability in circular DNA studied as Helfrich chiral chains”. Physical Review E, 58 (1998).