

XÂY DỰNG MÔ HÌNH TOÁN ĐỂ TẠO HÌNH BIÊN DẠNG ROTOR CIC BƠM ROOTS

DEVELOPING A MATHEMATICAL MODEL FOR GENERATING THE CIC ROTOR PROFILE OF A ROOTS PUMP

Phạm Đức Thiên*, Nguyễn Thanh Tùng

Trường Đại học Mỏ – Địa Chất

*Email: phamducthien@humg.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo tập trung vào xây dựng mô hình toán cho biên dạng rotor CIC (Circle – Involute – Circle) bơm Roots bằng cách tổ hợp các cung cong bao gồm cung tròn ở đỉnh rotor, cung thân khai ở sườn bên rotor và cung tròn ở đáy rotor. Dựa trên các phép biến đổi toán học và các ma trận chuyển đổi, phương trình toán học đoạn cung tròn đỉnh, đoạn cung thân khai cạnh và cung tròn đáy được hình thành. Bên cạnh đó, nội dung bài báo còn giải quyết các vấn đề về điều kiện liên tục các cung cong tại các điểm chuyển tiếp. Bằng sự hỗ trợ của ứng dụng Matlab, mô hình Rotor CIC kiểu 2, 3 và 4 cánh được hình thành. Kết quả của bài báo thể hiện tính đúng của mô hình toán và các điều kiện hình thành.

Từ khóa: Bơm Roots; Thân khai; Cung tròn.

ABSTRACT

This paper focus on developing a mathematical model for the rotor profile of a CIC (Circle – Involute – Circle) of Roots pump by combining a circular arc, an involute curve, and another circular arc. Based on mathematical transformations and transformation matrices, the governing equations for the circular arc and involute segments are formulated. In addition, the paper addresses continuity conditions at the transition points between the connected curves to ensure smoothness of the rotor profile. By using Matlab software, CIC rotor profiles with 2-lobe, 3-lobe, and 4-lobe configurations are successfully generated. The results confirm the correctness of the mathematical model and the validity of the geometric constraints applied.

Keywords: Roots pump; Involute rotor; Circle rotor.



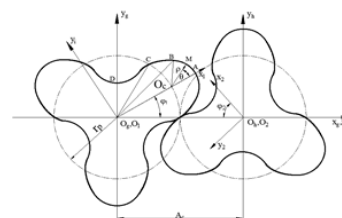
1. GIỚI THIỆU

Bơm Roots (thuộc dòng bơm thể tích) thường được sử dụng để tạo môi trường chân không trong các ngành thực phẩm, đồ uống, hóa chất,... nhờ các ưu điểm như kết cấu đơn giản, lưu lượng lớn, dễ lắp ráp và chi phí bảo trì thấp [1]. Biên dạng cánh rotor là ảnh hưởng đến hiệu suất làm việc của bơm, do trạng thái chân không được hình thành bởi quá trình ăn khớp giữa cặp cánh rotor. Hiện nay, hướng nghiên cứu hiện nay chủ yếu tập trung vào thiết kế biên dạng cánh rotor của bơm Roots để cải thiện hiệu suất bơm, đồng thời đảm bảo tính phù hợp với các công nghệ gia công hiện đại. Nhiều nghiên cứu đã sử dụng các đường cong hình học cơ bản cùng với các điều kiện ràng buộc hình học để thiết kế biên dạng rotor Roots. Wang và cộng sự [2] sử dụng năm cung tròn để thiết kế biên dạng rotor và phân tích ảnh hưởng của các tham số thiết kế đến hiệu suất bơm. Nhóm tác giả Niimura và cộng sự [3] đề xuất biên dạng rotor gồm cung tròn và đường thân khai nhằm nâng cao hiệu suất bơm. Hsieh và Hwang [4, 5] sử dụng đường trochoid và hàm đa thức, hàm tỉ lệ trochoid biến thiên để thiết kế phần đỉnh rotor, đường cycloid mở rộng kết hợp đường trochoid biến thiên để tạo hình biên dạng cánh [6]. Ngoài ra, Hsieh [7] còn sử dụng đường elip để tạo hình biên dạng cánh rotor bơm có tính đến điều kiện cắt chân răng. Kang và Vu [8] đề xuất hai biên dạng rotor cho bơm Roots, gồm biên dạng ECE (epicycloidal-circular-epicycloidal) và CEC (circular-epicycloidal-circular). Gần đây, nhóm tác giả Wu và Tran [9] đề xuất biên dạng rotor mới gồm năm đoạn cong, bao gồm một đường involute, một cung tròn và đường đồng dạng của nó, một đường epicycloid và đường đồng dạng của nó. Các nghiên cứu trên đã đề cập việc thiết kế hình dạng rotor bơm Roots, tuy nhiên mỗi biên dạng đề xuất đều có những hạn

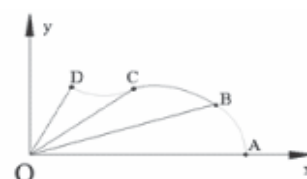
chế nhất định. Nghiên cứu này đề xuất một mô hình toán học cho biên dạng rotor CIC mới. Biên dạng rotor mới gồm ba đoạn cong: cung tròn (Circle) - đường thân khai (Involute) - cung tròn (Circle). Từ cơ sở mô hình toán rotor CIC để thực hiện các nghiên cứu chuyên sâu về loại rotor mới này.

2. XÂY DỰNG BIÊN DẠNG ROTOR CIC BƠM ROOTS

Như biểu diễn ở Hình 1, biên dạng CIC của rotor là được kết hợp bởi ba họ đường cong. Biên dạng rotor là đối xứng trục nên chỉ cần xác định cho một nửa biên dạng. Đoạn đường cong phần đỉnh rotor AB là một cung tròn có bán kính ρ được sử dụng để đảm bảo điều kiện khép kín với phần vỏ của bơm. Khe hở giữa phần đỉnh rotor và thành trong của vỏ bơm sẽ trở lên dài và hẹp hơn, việc này sẽ cho đường làm việc tốt hơn và cửa vào rộng hơn. Đoạn BC là một đường thân khai được sử dụng để ngăn chặn mòn bề mặt răng trên đường làm việc dọc theo đường tròn làm việc. Và cuối cùng là đoạn CD là một đường cung tròn đáy đối tiếp với cung tròn đỉnh của rotor đối tiếp.



(a) Biên dạng rotor CIC



(b) Đoạn biên dạng rotor CIC

Hình 1. Hệ tọa độ xây dựng mô hình toán rotor biên dạng CIC

$$f_{2,B} = \mathbf{n}_{1,AB} \cdot \mathbf{t}_{1,BC} = \left[\frac{\partial x_{1,BC}}{\partial u}, \frac{\partial y_{1,BC}}{\partial u} \right]^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1,AB}(\theta)}{\partial \theta} \times \mathbf{k} \right)^T = 0 \quad (6)$$

(3) Điều kiện liên tục về độ cong của hai cung cong tại điểm B thể hiện qua phương trình (7):

$$f_{3,B} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{1,AB}(\theta)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{1,BC}(u)}{\partial u^2} = 0 \quad (7)$$

*Với đoạn cung tròn CD: Cung tròn đáy CD của rotor thứ nhất sẽ nối tiếp với cung tròn đỉnh của rotor thứ hai. Điểm $M_2(x_2, y_2)$ trên cung lõm S_2 được xác định thông qua ma trận chuyển đổi M_{21} , ta có:

$$M_2 = M_{21} \cdot M_1 = M_{2f} \cdot M_{f1} \cdot M_1$$

Trong đó: M_{f1} là ma trận chuyển đổi từ hệ tọa độ S_1 sang hệ tọa độ S_g ; M_{2f} là ma trận chuyển đổi từ hệ tọa độ S_2 sang hệ tọa độ S_h .

$$M_{2f} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & -2r_p \cos \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 2r_p \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và}$$

$$M_{f1} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow M_{21} = M_{2f} \cdot M_{f1} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi & -2r_p \cos \phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi & 2r_p \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Tọa độ điểm M trên cung tròn CD xác định theo phương trình:

$$\mathbf{r}_{1,CD} = M_{21} \mathbf{r}_{1,AB} = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta - 2\phi) + a \cos 2\phi - 2r_p \cos \phi \\ \rho \sin(\theta - 2\phi) - a \sin 2\phi + 2r_p \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (R - r_p) \cos \theta + r \\ (R - r_p) \sin \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Véc tơ pháp tuyến của cung tròn CD trên rotor 2 được xác định như phương trình (10):

$$\mathbf{n}_{2,CD} = M_{21} \mathbf{n}_{1,AB} = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi & -2r_p \cos \phi \\ -\sin 2\phi & \cos 2\phi & 2r_p \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1,AB}(\theta)}{\partial \theta} \times \mathbf{k} \right)^T \quad (10)$$

Để cung tròn đáy và cung tròn đỉnh của hai rotor nối tiếp thỏa mãn điều kiện ăn khớp với nhau, nó được xác định qua phương trình (11):

$$f_4 = \frac{\partial \mathbf{r}_{2,CD}}{\partial \phi} \cdot \mathbf{n}_{2,CD} = \sin(\phi - \theta) + \sin \theta = 0 \quad (11)$$

Đoạn CD và BC nối tiếp với nhau tại điểm C, nên tại C hai đường cong phải thỏa điều kiện tiếp xúc và trơn biên dạng tương tự điểm B. Các điều kiện được thể hiện như phương trình:

(1) Điều kiện liên tục về vị trí tại điểm C thể hiện qua phương trình (12):

$$f_{1,C} = (x_{CD}^2 + y_{CD}^2) - (x_{BC}^2 + y_{BC}^2) = 0 \quad (12)$$

(2) Điều kiện liên tục về tiếp tuyến thể hiện qua phương trình (13):

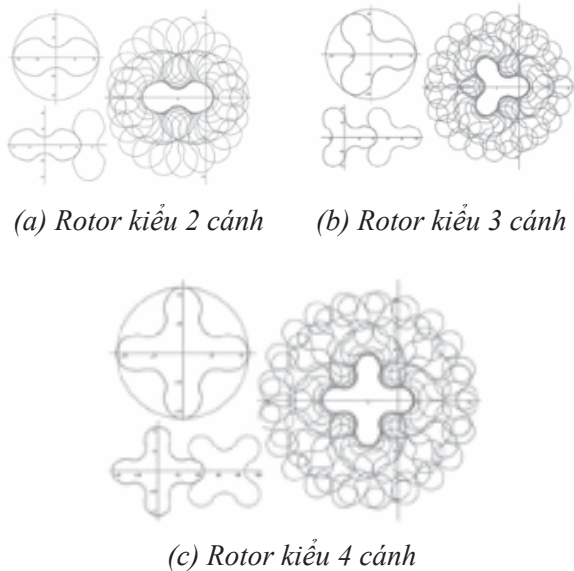
$$f_{2,C} = \mathbf{n}_{1,CD} \cdot \mathbf{t}_{1,BC} = \left[\frac{\partial x_{1,BC}}{\partial u}, \frac{\partial y_{1,BC}}{\partial u} \right]^T \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{1,CD}(\theta)}{\partial \theta} \times \mathbf{k} \right)^T = 0 \quad (13)$$

(3) Điều kiện liên tục về độ cong của hai cung cong tại điểm B:

$$f_{3,C} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{1,CD}(\theta)}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{r}_{1,BC}(u)}{\partial u^2} = 0 \quad (14)$$

Các phương trình (1), (3) và (10) thể hiện phương trình biên dạng CIC mới. Bằng việc giải các phương trình điều kiện ở phương

trình (5, 6, 7, 11, 12, 13, 14) cho chúng ta giá trị các tham số thiết kế. Bằng sự hỗ trợ của công cụ Matlab và Autocad thì biên dạng rotor CIC kiểu 2, 3, 4 cánh được hình thành như hình 3.



Hình 3. Rotor CIC bơm Roots

3. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, Mô hình rotor CIC bơm roots được hình thành dựa trên ba đường cong cung tròn, thân khai và cung tròn. Dựa trên các phép biến đổi toán học, các phương trình toán học các cung cong tròn, cung thân khai được thiết lập. Cùng với nó là điều kiện ăn khớp đối tiếp, điều kiện liên tục được thành lập để tạo hình biên dạng rotor. Biên dạng rotor CIC với ba kiểu cánh khác nhau 2, 3, 4 cánh được tạo ra từ các mô hình toán đã minh chứng được tính đúng của mô hình toán. Từ mô hình toán này, nghiên cứu mở ra các hướng nghiên cứu tiếp theo để hoàn thiện quá trình thiết kế, chế tạo loại rotor CIC mới cho bơm Roots này. ❖

Ngày nhận bài: 03/5/2025

Ngày phản biện: 20/5/2025

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Y.H. Kang, H.H. Vu, C.H. Hsu, “Factors impacting on performance of lobe pumps: a numerical evaluation”. Journal of Mechanics 28 (2012), 229-238.
- [2]. P.Y. Wang, Z.H. Fong, H.S. Fang, “Design constraints of five-arc Roots vacuum pumps”. Proc Inst Mech Eng C J Mech Eng Sci 216 (2002), 225-234.
- [3]. Y. Niimura, R. Kikuta, K. Usui, “Two-Shaft type rotary machine having a tip circle diameter to shaft diameter within a certain range” (1990).
- [4]. C.F. Hsieh, Y.W. Hwang, “Study on the high-sealing of roots rotor with variable trochoid ratio”. Journal of Mechanical Design 129 (2007), 1278-1284. <https://doi.org/10.1115/1.2779897>.
- [5]. Y.W. Hwang, C.F. Hsieh, “Study on high volumetric efficiency of the Roots rotor profile with variable trochoid ratio”. Proc Inst Mech Eng C J Mech Eng Sci 220 (2006), 1375-1384. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES176>.
- [6]. C.F. Hsieh, Y.W. Hwang, “Tooth profile of a Roots rotor with a variable trochoid ratio”. Math Comput Model 48 (2008), 19-33.
- [7]. C.F. Hsieh, “A new curve for application to the rotor profile of rotary lobe pumps”. Mech Mach Theory 87 (2015), 70-81. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.12.018>.
- [8]. Y.H. Kang, H.H. Vu, “A newly developed rotor profile for lobe pumps: Generation and numerical performance assessment”. Journal of Mechanical Science and Technology 28 (2014), 915-926.
- [9]. Y.R. Wu, V.T. Tran, “Generation method for a novel Roots rotor profile to improve performance of dry multi-stage vacuum pumps”. Mech Mach Theory 128 (2018), 475-491.