

MỘT TIÊU CHUẨN SAI SỐ BẬC CAO TÌM NGHIỆM XẤP XỈ CHO TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA HỆ PHI TUYẾN CÓ CHỨA ĐẠO HÀM CẤP BA

A HIGHER-ORDER ERROR CRITERION FOR FINDING APPROXIMATE SOLUTIONS OF FREE VIBRATION FREQUENCIES OF NONLINEAR SYSTEMS WITH THE THIRD-ORDER DERIVATIVE

Phạm Ngọc Chung^{1,*}, Nguyễn Như Hiếu²

¹Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Mở - Địa chất

²Khoa Cơ khí - Cơ điện tử, Trường Kỹ thuật Phenikaa, Đại học Phenikaa

Email: phamngocchung@humg.edu.vn*;

hieus.nguyennhu@phenikaa-uni.edu.vn

TÓM TẮT

Hệ phi tuyến có chứa đạo hàm cấp cao thường tạo ra các động lực học phức tạp. Đối với hệ có chứa đạo hàm cấp ba, ứng xử của hệ sẽ liên quan đến sự thay đổi của gia tốc, hay còn gọi là gia tốc biến thiên (jerk), và dẫn đến trạng thái chuyển động mà ở đó người ta có thể cảm nhận được mức độ “êm ái” của chuyển động. Trong nghiên cứu này, các tác giả đề xuất sử dụng một tiêu chuẩn sai số bậc cao, cụ thể là tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình để tìm nghiệm xấp xỉ cho tần số dao động tự do của một hệ phi tuyến có chứa đạo hàm cấp ba. Tiêu chuẩn có thể coi như một dạng bậc cao so với tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình đã biết. Hệ được xét có thành phần phi tuyến là tích của chuyển vị, vận tốc và gia tốc. Kết quả thu được chỉ ra rằng tiêu chuẩn đề xuất cho sai số tương đối nhỏ và nhỏ hơn so với các kết quả tần số thu được từ một số công bố trước đây. Tiêu chuẩn này có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến khác nhau.

Từ khóa: Hệ phi tuyến; Đạo hàm cấp ba; Tiêu chuẩn sai số; Tần số xấp xỉ.

ABSTRACT

Nonlinear systems containing higher-order derivatives often produce complex dynamics. In dynamical systems with the third-order derivative, their behaviors will involve the acceleration variation, also known as jerk, and lead to a state of motion where one can feel the “smoothness” of the motion. In this study, the authors propose the use of a higher-order error criterion, namely the mean quartic error criterion, to find an approximate solution for the free vibration's frequency of a nonlinear system containing the third-order derivative. The proposed criterion can be considered as a higher-order form of the well-known mean squared error criterion. The system under consideration has a nonlinear component that is the product of displacement, velocity, and acceleration. The obtained results show that our approach gives relatively small errors and is smaller than the frequency results received from some previous publications. The used criterion can be applied to various nonlinear systems.

Keywords: Nonlinear system; Jerk; Error criterion; Approximate frequency.



1. GIỚI THIỆU

Đạo hàm cấp cao xuất hiện trong một hệ phi tuyến thường dẫn đến các đặc trưng phong phú về động lực học [1]. Đây là chủ đề được quan tâm nghiên cứu trong nhiều thập kỷ trở lại đây, trong đó có vấn đề hệ động lực chứa đạo hàm cấp ba [2]. Đạo hàm cấp ba là đạo hàm theo thời gian của thành phần gia tốc trong hệ động lực, tức liên quan đến tốc độ thay đổi của gia tốc, một đặc trưng mới so với các hệ động lực thông thường có chứa đạo hàm cấp hai. Theo các phát biểu thông thường, đạo hàm cấp một theo thời gian của chuyển dịch được gọi là vận tốc, đạo hàm cấp hai của chuyển dịch gọi là gia tốc; tuy nhiên đạo hàm cấp ba ít được biết đến hơn, sau đây ta gọi đạo hàm cấp ba của chuyển dịch là thành phần giật (jerk trong tiếng Anh). Yếu tố giật xuất hiện trong nhiều bài toán kỹ thuật và vật lý khác nhau [3, 4]. Phương trình chứa giật có thể dẫn đến các hiện tượng chuyển động khác nhau, có thể là chuyển động tuần hoàn [5], có thể là chuyển động hỗn độn [6], tùy thuộc vào các miền tham số khác nhau xuất hiện trong phương trình. Các mô tả chi tiết về giật mà ở đó chuyển động của hệ là hỗn độn, có thể kể đến như von Baeyer [7], Sprott và Linz [8]. Trong khuôn khổ của nghiên cứu này, ta quan tâm đến các chuyển động tuần hoàn có thể xuất hiện trong hệ có thành phần giật. Với các chuyển động tuần hoàn, việc tìm nghiệm giải tích là bài toán có ý nghĩa. Với hệ có giật, nhiều phương pháp đã được đề xuất để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ trong một khuôn khổ nào đó mà độ chính xác của nghiệm là chấp nhận được. Cách tiếp cận cân bằng điều hòa cho hệ phi tuyến có chứa giật là một trong những ý tưởng đơn giản và tương đối dễ thực hiện, có thể tìm thấy trong nghiên cứu của Gottlieb [9]. Một cải tiến của phương pháp cân bằng điều hòa để tăng độ chính xác cho nghiệm là phương pháp cân bằng điều hòa dạng

đur, trình bày bởi Leung và Guo [10]. Nghiên cứu về nghiệm xấp xỉ của phương trình chứa giật được báo cáo bởi Karahan [11] sử dụng phương pháp nhiều dạng đa thang (multiple scale), trong đó thành phần phi tuyến được xét trong các tình huống khác nhau (chẳng hạn: tích của chuyển vị, vận tốc và gia tốc; tích của vận tốc và bình phương gia tốc). Gần đây, El-Dib [12] đã phát triển một phương pháp, gọi là tuyến tính hóa tương đương để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân phi tuyến bậc ba có chứa giật. Phương pháp của El-Dib tỏ ra hiệu quả với miền rộng các tham số và không cần xét đến nhiễu của nghiệm như các phương pháp nhiễu khác. Một phương pháp khác để tìm nghiệm xấp xỉ của hệ phi tuyến có chứa giật dựa vào một tiêu chuẩn sai số cụ thể nào đó. Cách tiếp cận này gần giống với phương pháp tuyến tính hóa tương đương; hệ được giả sử là có một nghiệm xấp xỉ nào đó với biểu diễn nghiệm chứa các tham số cần tìm, như trong nghiên cứu gần đây của Ismail và Abu-Zinadah [13]. Tuy nhiên, khi khảo sát với miền tham số lớn, nghiệm thu được của Ismail và Abu-Zinadah được xem là có sai số tăng dần. Trong nghiên cứu này, các tác giả mở rộng cách tiếp cận của Ismail và Abu-Zinadah, trong đó đề xuất sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình, một tiêu chuẩn sai số bậc cao hơn so với sai số bậc hai đã biết. Do đó, nghiệm xấp xỉ tìm được đã được cải tiến về độ chính xác so với tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình trong cách tiếp cận của Ismail. Các khảo sát số được tiến hành nhằm minh họa cho tính hiệu quả của cách tiếp cận đề xuất.

2. TIÊU CHUẨN SAI SỐ BÌNH PHƯƠNG TRUNG BÌNH VÀ MŨ BỐN TRUNG BÌNH

Xét phương trình dạng tổng quát sau đây có chứa đạo hàm cấp ba [5]:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0 \quad (1)$$

Trong đó, $x = x(t)$ là đáp ứng chuyển dịch, $\dot{x}$ là đáp ứng vận tốc, $\ddot{x}$ là đáp ứng gia tốc, $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ là một hàm phi tuyến của ba đối số chuyển dịch, vận tốc và gia tốc. Nghiệm xấp xỉ của phương trình (1) được giả sử có dạng $x = x_1(t, \omega, P)$ là tuần hoàn với tần số ω , P là tập các tham số có trong biểu diễn nghiệm. Nếu x_1 có biểu diễn tuần hoàn theo dạng chuỗi Fourier thì P ký hiệu tập các tham số của chuỗi xấp xỉ. Thay nghiệm này vào (1), ta thu được sai số $e(t) = \ddot{x}_1 + f(x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1)$. Tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình và mũ bốn trung bình cho phương trình (1) có dạng sau đây:

$$E_{2n}(\omega, P) = \int_0^T e^{2n}(t) dt \rightarrow \min_{\omega, P} \quad (2)$$

Trong đó, $n = 1$ cho tiêu chuẩn bình phương trung bình và $n = 2$ cho tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình; T là chu kỳ dao động của hệ, $T = 2\pi/\omega$. Tiêu chuẩn (2) dẫn tới phương trình sau đây để xác định tần số ω và các tham số của nghiệm xấp xỉ:

$$\frac{\partial E_{2n}(\omega, P)}{\partial \omega} = 0, \frac{\partial E_{2n}(\omega, P)}{\partial P} = 0 \quad (3)$$

Trong phần tiếp theo, để minh họa tiêu chuẩn đề xuất (3) cho phương trình phi tuyến jerk, ta thực hiện tìm tần số cho một hệ phi tuyến mà ở đó thành phần phi tuyến là tích của chuyển dịch, vận tốc và gia tốc.

3. HỆ PHI TUYẾN JERK VỚI THÀNH PHẦN PHI TUYẾN LÀ TÍCH CỦA CHUYỂN DỊCH, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC

Trong phần này, ta xét hệ phương trình vi phân phi tuyến sau đây [13]:

$$\ddot{x} + \dot{x} - \gamma x \ddot{x} = 0 \quad (4)$$

Trong đó, γ là một tham số phi tuyến gắn với thành phần là tích của chuyển dịch, vận tốc và gia tốc. Điều kiện đầu của phương trình (4) giả sử là:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = A, \ddot{x}(0) = 0 \quad (5)$$

Trong đó, chuyển dịch và gia tốc ban đầu tại thời điểm $t = 0$ được giả sử bằng không, trong khi đó vận tốc ban đầu được giả sử khác không và có giá trị A cho trước. Giả sử nghiệm xấp xỉ bậc nhất của (4) có dạng sau đây thỏa mãn điều kiện đầu (5):

$$x_1(t) = x_1(t, \omega, A) = \frac{A}{\omega} \sin \omega t \quad (6)$$

Thay nghiệm (6) vào (2), ta thu được:

$$E_{2n}(\omega) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \gamma^k A^{2n+2k} (1-\omega^2)^{2n-k} J_{kn}(\omega) \rightarrow \min_{\omega} \quad (7)$$

Trong đó, $C_{2n}^k = (2n)! / (k!(2n-k)!)$;

$J_{kn}(\omega)$ được xác định như sau:

$$J_{kn}(\omega) = \int_0^T \sin^{2k} \omega t \cos^{2n} \omega t dt \quad (8)$$

Chú ý rằng trong biểu diễn nghiệm bậc nhất (6), chỉ có tham số tần số ω là chưa biết. Trong trường hợp xét xấp xỉ bậc cao hơn thì các tham số chưa biết tương ứng sẽ xuất hiện. Do đó, kết quả của (8) là chỉ cực tiểu hóa theo ω để thu được tần số cần tìm. Trong quá trình tính tích phân cho tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình và tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình, các biểu thức sau cho $J_{kn}(\omega)$ sẽ được sử dụng:

$$J_{01} = \pi / \omega, J_{11} = \pi / (4\omega), J_{21} = \pi / (8\omega) \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} J_{02} &= 3\pi / (4\omega), \quad J_{12} = \pi / (8\omega), \\ J_{22} &= 3\pi / (64\omega), \quad J_{32} = 3\pi / (128\omega), \\ J_{42} &= 7\pi / (512\omega). \end{aligned}$$

3.1. Tần số thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình

Trong trường hợp tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình (tức với $n = 1$), ta thu được biểu thức của E_2 là:

$$E_2 = E_2(\omega) = \frac{\pi A^2}{8\omega} [8 + 4\gamma A^2 + \gamma^2 A^4 - (16 + 4\gamma A^2)\omega^2 + 8\omega^4] \quad (9)$$

Đạo hàm của hàm $E_2(\omega)$ theo ω , ta thu được một phương trình trùng phương, giải ra ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{4 + \gamma A^2 + \sqrt{64 + 32\gamma A^2 + 7\gamma^2 A^4}}{12}} \quad (10)$$

3.2. Tần số thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình

Trong trường hợp tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình (tức $n = 2$), biểu thức của E_4 có dạng sau đây:

$$E_4 = E_4(\omega) = \frac{\pi A^4}{\omega} (b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + b_3\omega^6 + b_4\omega^8) \quad (11)$$

Trong đó, các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 cho bởi:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\gamma A^2 + \frac{9}{32}\gamma^2 A^4 + \frac{3}{32}\gamma^3 A^6 + \frac{7}{512}\gamma^4 A^8, \\ b_1 &= -3 - \frac{3}{2}\gamma A^2 - \frac{9}{16}\gamma^2 A^4 - \frac{3}{32}\gamma^3 A^6 \\ b_2 &= \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\gamma A^2 + \frac{9}{32}\gamma^2 A^4, \quad b_3 = -3 - \frac{1}{2}\gamma A^2, \quad b_4 = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (12)$$

Tiêu chuẩn (3) dẫn đến phương trình bậc bốn của bình phương tần số:

$$-b_0 + b_1\omega^2 + 3b_2\omega^4 + 5b_3\omega^6 + 7b_4\omega^8 = 0 \quad (13)$$

Trong đó, các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 xác định từ (12). Việc giải một phương trình bậc bốn đầy đủ của ω^2 như phương trình (13) là có thể, tuy nhiên biểu thức giải tích của nó là tương đối phức tạp và không được trình bày ở đây; thay vào đó ta tìm nghiệm của (13) dưới dạng số. Ta viết nghiệm của phương trình (13) dưới dạng:

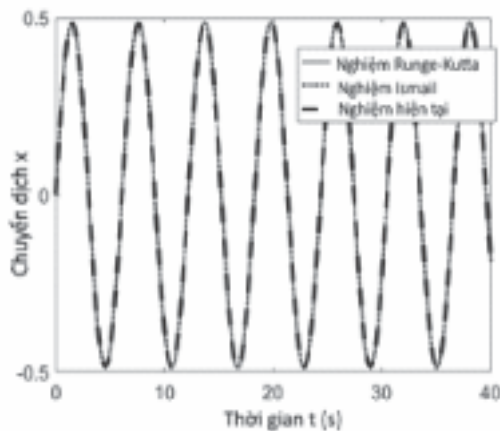
$$\omega = \omega(\gamma, A) \quad (14)$$

Trong đó, chú ý rằng các hệ số b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 phụ thuộc vào tích γA^2 , vì thế ω cũng là hàm của tích γA^2 . Trong phần sau, ta sẽ khảo sát nghiệm của (18) dưới dạng số theo tham số γA^2 .

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này, kết quả số cho phương trình (13) được trình bày. Như nhận định ở trên, ta thấy rằng trong các kết quả nghiệm giải tích (10), (14), tần số là một hàm của tích γA^2 . Tại một giá trị lựa chọn trước của tích γA^2 , ta có thể lựa chọn một tham số γ , vốn là tham số gắn với số hạng phi tuyến của hệ động lực, và lựa chọn một điều kiện ban đầu liên quan đến tham số A . Không giảm tính chất tổng quát, ta có thể giả sử $\gamma = 1$ và khảo sát đáp ứng của hệ thống qua tham số A . Trong Hình 1 là kết quả nghiệm diễn tiến theo thời gian của đáp ứng chuyển vị x với các phương pháp khác nhau gồm: phương pháp số Runge-Kutta bậc 4, nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình theo cách tiếp cận của Ismail đã thực hiện và nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Giá trị ban đầu A được lấy là $A = 0.5$. Thời gian mô phỏng được lấy là 40 (s). Có thể thấy rằng cả ba phương pháp đều cho kết quả tương đối trùng khớp lên nhau. Kết quả số từ

thuật toán Runge-Kutta là một trong những kết quả tham chiếu tin cậy do nó có độ chính xác cao khi giải quyết các hệ động lực phi tuyến; và do đó nó được lấy làm tham chiếu để đánh giá độ chính xác của các phương pháp giải tích xấp xỉ khác. Nghiệm thu được theo Ismail và nghiệm thu được từ tiêu chuẩn mũ bốn trung bình là tương đối chính xác trong tình huống tham số đã lựa chọn.

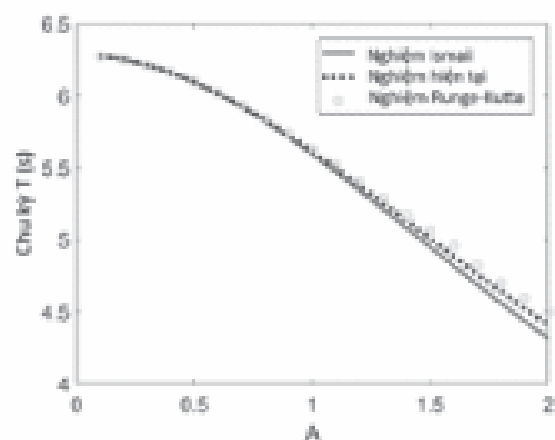


Hình 1. Đồ thị tiến triển theo thời gian của đáp ứng $x_f(t)$ với các phương pháp khác nhau

Để đánh giá hơn nữa về tiêu chuẩn đề xuất, việc khảo sát kết quả tần số dao động xấp xỉ thu được thay đổi theo tham số A là cần thiết. Trước hết, ta có thể thấy rằng tiêu chuẩn (3) cho ta điểm cực tiểu của các hàm số $E_2(\omega)$ và $E_4(\omega)$. Giá trị của đối số ω mà các hàm này cực tiểu chính là tần số cần tìm. Thông qua khảo sát số của hai hàm này theo đối số ω , ta có thể thấy các hàm này đều chỉ có một điểm cực tiểu duy nhất tại một giá trị ω dương. Cụ thể, với $A = 0.5$, ta thu được giá trị tần số tương ứng là $\omega = \omega_{E2} = 1.0312$ theo cách tiếp cận của Ismail, tức tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình; $\omega = \omega_{E2} = 1.0309$ theo cách tiếp cận sai số mũ bốn trung bình; trong khi đó tần số thu được từ phương pháp Runge-Kutta là $\omega = \omega_{RK} = 1.0308$. Đơn vị của tần số vòng ω được lấy là rad/s. Một lần nữa có thể thấy rằng tần số của cả ba cách

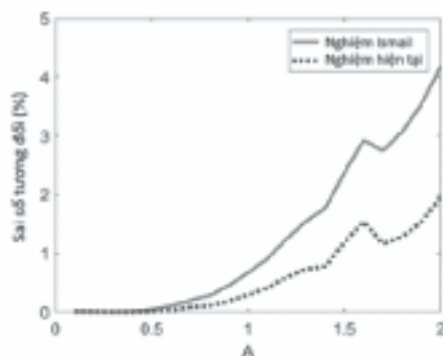
tiếp cận là tương đối gần nhau. Tuy nhiên, sự sai khác giữa cách tiếp cận theo Ismail và tiếp cận theo sai số mũ bốn trung bình bắt đầu bộc lộ khi tăng giá trị của tham số biên độ A .

Trên Hình 2, giá trị số của chu kỳ dao động tương ứng với ba phương pháp đã nêu đều được hiển thị, trong đó đường nét liền màu đỏ thể hiện nghiệm thu được từ Ismail, đường nét đứt màu xanh hiển thị kết quả của tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Đáng chú ý sai số tương đối của chu kỳ dao động so với chu kỳ dao động thu được từ thuật toán Runge-Kutta được hiển thị trên Hình 3 với A được lấy từ 0.1 đến 2.0. Ta thấy rằng khi tăng A , nhược điểm của cách tiếp cận Ismail bắt đầu bộc lộ, tức là sai số tương đối tăng dần, ở mức 4% khi $A = 2$, trong khi đó sai số của tiêu chuẩn mũ bốn trung bình thì nhỏ hơn, ở mức 2% khi $A = 2$. Từ khoảng giá trị $A = 0.5$ thì hầu hết tiêu chuẩn mũ bốn bình phương trung bình đều tốt hơn tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình. Điều này cũng tương đối dễ hiểu bởi vì tiêu chuẩn mũ bốn trung bình được lấy là bậc cao của sai số so với tiêu chuẩn bình phương trung bình truyền thống.



Hình 2. Chu kỳ dao động của hệ thay đổi theo tham số A với các phương pháp khác nhau





Hình 3. Sai số tương đối của chu kỳ dao động của nghiệm thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình (theo Ismail) và tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình

Bảng 1. So sánh sai số giữa các phương pháp khác nhau theo giá trị của biên độ A

A	Runge-Kutta	Karahan [11]		Leung-Guo [10]		Ismail [13]		Hiện tại	
	T	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)	T	Sai số (%)
0.1	6.2747	6.2753	0.0096	6.2753	0.0096	6.2754	0.0102	6.2753	0.0097
0.2	6.2515	6.2518	0.0049	6.2518	0.0049	6.2519	0.0068	6.2520	0.0077
0.5	6.0956	6.0884	0.1171	6.0885	0.1160	6.0930	0.0427	6.0949	0.0103
1.0	5.6293	5.5258	1.8400	5.5299	1.7659	5.5922	0.6605	5.6129	0.2922
2.0	4.4959	4.6857	4.2210	4.7260	5.1175	4.3157	4.0095	4.4095	1.9234

Bức tranh sai số của phương pháp hiện tại dựa trên tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình còn được làm rõ trên Bảng 1 thông qua so sánh với các kết quả từ các công bố trước đây. Trong bảng này, hai kết quả từ công bố của Karahan [11] và công bố của Leung và Guo [10] được lấy làm minh họa. Rõ ràng rằng, với các giá trị biên độ nhỏ, hầu hết các phương pháp đều cho sai số tương đối là nhỏ, chẳng hạn với $A = 0.1$, sai số của các phương pháp đều ở mức 0.01%. Khi lấy $A = 0.2$ thì sai số tăng lên và có sự phân hóa, tức trong khi sai số của Karahan và Leung-Guo duy trì ở mức 0.05% thì sai số của Ismail

và cách tiếp cận hiện tại có tăng hơn một lượng nhỏ nhất định. Khi tham số A lớn, chẳng hạn $A = 2.0$, sai số thu được từ tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình là nhỏ nhất, ở mức 2%, trong khi các phương pháp còn lại đều ở mức 4-5%. Từ đó có thể khẳng định rằng với biên độ lớn, việc phát triển một tiêu chuẩn sai số bậc cao là cần thiết để làm giảm sai số nghiệm xấp xỉ của hệ phi tuyến.

5. KẾT LUẬN

Việc tìm nghiệm xấp xỉ của một hệ

động lực có chứa thành phần đạo hàm cấp ba được thực hiện trong nghiên cứu này thông qua việc đề xuất sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình. Sai số thu được từ giả thiết về dạng nghiệm tuần hoàn bậc nhất của hệ. Kết quả thu được chỉ ra rằng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình là một tiêu chuẩn có tính hiệu quả, làm giảm sai số tương đối của nghiệm so với sai số tương đối thu được từ tiêu chuẩn sai số bình phương trung bình đã biết. Với giá trị nhỏ của tham số, cụ thể là tham số A đặc trưng cho vận tốc ban đầu, các phương pháp đã biết và phương pháp sai số mũ bốn trung bình cho kết quả gần tương đương nhau về độ chính xác. Tuy nhiên khi A tăng thì sai số giữa các phương pháp đã biết có biểu hiện rõ và tăng dần. Việc sử dụng tiêu chuẩn sai số mũ bốn trung bình làm cho sai số tương đối của nghiệm giảm đi ở mức một nửa, tức xuống còn 2% trong miền tham số khảo sát là một kết quả có thể chấp nhận được. Tần số tìm được càng chính xác thì sai khác pha chuyển động của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm đúng (kỳ vọng) của hệ càng được cải thiện, tức giảm thiểu sai số ở mức càng nhỏ thì càng có ý nghĩa về mặt cơ học và vật lý. ❖

Ngày nhận bài: 09/7/2025

Ngày phản biện: 21/7/2025

Tài liệu tham khảo:

- [1]. John H. Hubbard, Beverly H. West, "Differential Equations: A Dynamical Systems Approach: Higher-Dimensional Systems". Springer-Verlag New York, (1995).
- [2]. Stefan J. Linz, "Newtonian jerky dynamics: Some general properties". Am. J. Phys. 66 12 (1998).
- [3]. J. C. Sprott, "Simple chaotic systems and circuits". Am. J. Phys. 68 (2000).
- [4]. Fabien Kenmogne, Samuel Noubissie, Guy Bertrand Ndombou, Eric Tala Tebue, Armel Viquit Sonna, David Yemélé, "Dynamics of two models of driven extended jerk oscillators: Chaotic pulse generations and application in engineering". Chaos, Solitons & Fractals, 152, 111291 (2021).
- [5]. H. P. W. Gottlieb, "Simple nonlinear jerk functions with periodic solutions". Am. J. Phys., 66, No. 10 (1998).
- [6]. Bingxue Li, Bo Sang, Mei Liu, Xiaoyan Hu, Xue Zhang, Ning Wang, "Some jerk systems with hidden chaotic dynamics". International Journal of Bifurcation and Chaos, 33, No. 06, 2350069 (2023).
- [7]. H.C. Von Baeyer, "All shook up". The Sciences 38,12-14 (1998).
- [8]. J.C. Sprott, S.J. Linz, "Algebraically simple chaotic flows". International Journal of Chaos Theory and Applications, 5, 3-22 (2000).
- [9]. H.P.W. Gottlieb, "Harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations". Journal of Sound and Vibration, 271, 671-683 (2004).
- [10]. A.Y.T. Leungn, Zhongjin Guo, "Residue harmonic balance approach to limit cycles of non-linear jerk equations". International Journal of Non-Linear Mechanics, 46, 898-906 (2011).
- [11]. M.M. Fatih Karahan, "Approximate solutions for the nonlinear third-order ordinary differential equations". Zeitschrift für Naturforschung A, 72, no. 6, pp. 547-557 (2017). <https://doi.org/10.1515/zna-2016-0502>.
- [12]. Yusry O. El-Dib, "The simplest approach to solving the cubic nonlinear jerk oscillator with the non-perturbative method", 45(9), pp. 5165-5183 (2022). <https://doi.org/10.1002/mma.8099>.
- [13]. Gamal M. Ismail, Hana Abu-Zinadah, "Analytic approximations to non-linear third order jerk equations via modified global error minimization method". Journal of King Saud University - Science, 33, 101219 (2021).