

ĐỒNG BỘ HÓA ĐỒNG NHẤT CỦA HỆ SIÊU HỖN LOẠN BỐN CHIỀU SỬ DỤNG CÁCH TIẾP CẬN HÀM NĂNG LƯỢNG HAMILTONIAN

IDENTICAL SYNCHRONIZATION OF 4D HYPERCHAOTIC SYSTEMS USING THE HAMILTONIAN ENERGY FUNCTION APPROACH

Nguyễn Như Hiếu^{1,*}, Phạm Ngọc Chung²

¹Khoa Cơ khí - Cơ điện tử, Trường Kỹ thuật Phenikaa, Đại học Phenika

²Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Mở - Địa chất

Email: hieu.nguyennhu@phenikaa-uni.edu.vn*;
phamngocchung@humg.edu.vn

TÓM TẮT

Đồng bộ hóa của hai hệ động lực là quá trình mà ở đó cả hai hệ điều chỉnh trạng thái sao cho chúng có tương quan chặt chẽ với nhau hoặc trở nên có ứng xử giống nhau theo một cách nào đó. Đối với hệ có chuyển động hỗn loạn thường nhạy cảm với điều kiện đầu và do đó ứng xử rất khác nhau với các điều kiện đầu khác nhau, điều đó làm cho chúng tưởng như là không thể đồng bộ hóa. Sự thực là việc đồng bộ hóa hai hệ hỗn loạn là có thể nhưng việc lựa chọn tham số đồng bộ là một trong những khó khăn chính. Trong nghiên cứu này, các tác giả sử dụng cách tiếp cận dựa trên hàm năng lượng Hamiltonian để khảo sát sự đồng bộ hóa của hai hệ đồng nhất, tức hai hệ có dạng trường vận tốc giống nhau nhưng khác trạng thái. Hệ được lựa chọn là một hệ Lorenz bốn chiều có đặc điểm chuyển động siêu hỗn loạn, một mức hỗn loạn cao hơn so với hệ Lorenz ba chiều đã biết. Các khảo sát số được tiến hành để khẳng định tính hiệu quả của các tín hiệu đồng bộ hóa.

Từ khóa: Hệ siêu hỗn loạn; Đồng bộ hóa; Năng lượng Hamiltonian; Quỹ đạo pha.

ABSTRACT

Synchronization of two dynamical systems is a process by which both systems adjust their states so that they are closely correlated or become similar in some way. Chaotic systems are often sensitive to initial conditions and therefore behave very differently for different initial conditions, which makes them seem impossible to synchronize. In fact, synchronization of two chaotic systems is possible, but the choice of synchronization parameters is one of the main difficulties. In this study, the authors use a Hamiltonian-based approach to investigate the synchronization of two homogeneous systems, i.e. two systems with the same form of velocity field but different states. The chosen system is a four-dimensional Lorenz system characterized by hyperchaotic motion, a higher level of chaos than the known three-dimensional Lorenz system. Numerical investigations are conducted to confirm the effectiveness of the synchronization signals.

Keywords: Hyperchaotic system; Synchronization; Hamiltonian energy; Phase portrait.

1. GIỚI THIỆU

Đồng bộ hóa của các hệ có chuyển động hỗn loạn là một nội dung hấp dẫn các nhà nghiên cứu trong lĩnh vực động lực học của các hệ phi tuyến và nhiều lĩnh vực khác, có ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật và công nghệ như truyền thông bảo mật, các hệ cảm biến, các hệ cơ sinh học, robotics và điều khiển [1, 2]. Có một số kiểu đồng bộ hóa phổ biến như đồng bộ hóa đồng nhất, đồng bộ hóa trễ thời gian, đồng bộ hóa pha, đồng bộ hóa tổng quát hóa [3]. Đối với đồng bộ hóa đồng nhất, hai hệ đồng bộ hóa có cùng một dạng biểu diễn véc tơ trường được liên kết với nhau thông qua một số hạng phản hồi tuyến tính hoặc phi tuyến. Đồng bộ hóa trễ thời gian là loại đồng bộ mà hai hệ liên kết với nhau đạt được sự đồng bộ hóa với một khoảng trễ thời gian giữa chúng. Nó có thể xuất hiện trong các ứng dụng truyền tín hiệu qua kênh có độ trễ, trong đó bên nhận tín hiệu (hệ đáp ứng) sẽ bị trễ thời gian so với bên phát tín hiệu (hệ dẫn dắt). Đồng bộ hóa pha là dạng đồng bộ hai hệ mà ở đó chỉ có pha được đồng bộ còn biên độ có thể không nhất thiết giống nhau. Trong các hệ hỗn loạn, tín hiệu thường không có tính chất tuần hoàn và do đó đồng bộ hóa pha cần sử dụng các kỹ thuật đặc biệt [4]. Ở dạng tổng quát trong bài toán đồng bộ hóa, người ta có thể đưa vào các tiêu chuẩn đồng bộ mà ở đó quan hệ giữa hệ dẫn dắt và hệ đồng bộ (bị dẫn dắt) có thể có liên kết với nhau thông qua một biểu diễn hàm [5]. Trong nghiên cứu này, các tác giả tập trung vào vấn đề đồng bộ hóa đồng nhất của hai hệ đồng nhất bốn chiều có chuyển động hỗn loạn. Hai hệ này có cùng dạng biểu diễn trường nhưng có liên kết tuyến tính với nhau. Hệ có chuyển động hỗn loạn có đặc trưng số mũ Lyapunov mang dấu dương. Đối với các hệ có nhiều hơn một số mũ Lyapunov dương, tức là tối thiểu hai số mũ Lyapunov dương được gọi với cái tên siêu hỗn loạn [6]. Các hệ siêu

hỗn loạn có số chiều lớn hơn hoặc bằng bốn. Việc đồng bộ hóa các hệ hỗn loạn ba chiều đã được nghiên cứu trong nhiều tài liệu. Tuy nhiên, đối với các hệ siêu hỗn loạn, việc đồng bộ hóa cũng được quan tâm nghiên cứu. Trong nghiên cứu của Peng và đồng nghiệp [7], hai hệ đồng nhất có chuyển động hỗn loạn được đồng bộ hóa sử dụng một kỹ thuật chọn ma trận trong cấu trúc liên kết giữa hai hệ. Các hệ siêu hỗn loạn còn có thể đạt được đồng bộ hóa trong một nghiên cứu thực nghiệm trên mạch điện được thực hiện bởi Tamasevicius và đồng nghiệp [8]. Tiềm năng của hệ nhiều chiều nói chung và hệ bốn chiều nói riêng, có tính chất chuyển động hỗn loạn là rất lớn trong các ứng dụng kỹ thuật [1, 2, 4]. Một điểm khó khăn trong đồng bộ hóa hệ lớn hơn 3 chiều nằm ở số chiều lớn, dẫn đến tính chất hỗn loạn mạnh hơn so với hệ ba chiều. Điều đó dẫn đến lựa chọn miền hợp lý của tham số liên kết đảm bảo sự đồng bộ hóa là tương đối khó. Trong nghiên cứu này, các tác giả đề xuất xây dựng một phương pháp đồng bộ hóa đồng nhất dựa trên khái niệm năng lượng Hamiltonian cho một hệ siêu hỗn loạn bốn chiều. Đây là cách tiếp cận cho phép tìm miền tham số của hệ số liên kết để hai hệ đồng bộ hóa một cách hiệu quả.

2. THIẾT LẬP ĐỒNG BỘ HÓA ĐỒNG NHẤT CỦA HỆ NHIỀU CHIỀU

Ta xét hệ ô-tô-nôm nhiều chiều tổng quát hóa có dạng sau:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Trong đó, $\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ là véc tơ trạng thái phụ thuộc thời gian t , $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ là một hàm trơn, phi tuyến n chiều và chỉ phụ thuộc vào véc tơ trạng thái $\mathbf{X}$. Véc tơ $\mathbf{f}$ có ý nghĩa như một trường vận tốc của hệ. Người ta đã chỉ ra rằng, với hệ ô-tô-nôm (1), tồn tại một hàm vô hướng $H = H(\mathbf{X})$ phụ thuộc biến trạng 

thái, gọi là hàm năng lượng Hamiltonian sao cho:

$$\dot{H} = \nabla H^T(\mathbf{X})\mathbf{f}_d(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

$$\nabla H^T(\mathbf{X})\mathbf{f}_c(\mathbf{X}) = 0 \quad (2.2)$$

Trong đó, theo định lý Hemholtz [9], trường véc tơ $\mathbf{f}$ có thể được tách thành hai trường véc tơ $\mathbf{f}_c$ và $\mathbf{f}_d$ với $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_c(\mathbf{X})$ được gọi là trường tự do đối với độ phân kỳ (divergence), tức là không đóng góp vào độ phân kỳ của hệ, còn $\mathbf{f}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{X})$ là trường gradient mang theo toàn bộ độ phân kỳ của hệ. Hệ (1) được gọi là hệ dẫn dắt, là một hệ độc lập, và đầu ra của nó có tác động đến một hệ khác được gọi là hệ đồng bộ hóa, hay hệ bị dẫn dắt. Nếu hai hệ này có dạng trường véc tơ giống nhau, ta gọi là đồng bộ hóa đồng nhất. Giả sử hệ đồng bộ hóa đồng nhất của hệ dẫn dắt (1) có dạng sau đây:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) + \mathbf{K}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (3)$$

Trong đó, ma trận $\mathbf{K}$ được gọi là ma trận liên kết, còn gọi là ma trận phản hồi, chứa các tham số hằng số. Trong nhiều tình huống ma trận $\mathbf{K}$ có thể được lấy là một ma trận đường chéo mà các phần tử của nó là bằng nhau và bằng γ . Gọi $P(\gamma)$ là hàm chi phí năng lượng trung bình để duy trì mức độ đồng bộ hóa của hệ động lực. Mức độ đồng bộ hóa đạt được nếu chuẩn sai số $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$ tiến dần về 0 khi thời gian t đủ lớn. Hàm $P(\gamma)$ được xác định như sau [9]:

$$P(\gamma) = -\langle \nabla H^T(\mathbf{X})\mathbf{f}_d(\mathbf{X}) \rangle \quad (4)$$

Trong đó, $\langle \cdot \rangle$ ký hiệu trung bình theo thời gian của hàm. Trong phần sau, ta sẽ sử dụng cách tiếp cận dựa trên hàm năng lượng Hamiltonian ở trên để đồng bộ hóa một hệ bốn chiều, gọi là hệ Lorenz bốn chiều.

3. ĐỒNG BỘ HÓA HỆ LORENZ BỐN CHIỀU DỰA TRÊN HÀM NĂNG LƯỢNG HAMILTONIAN

Xét hệ Lorenz bốn chiều [10], sau đây được chọn là hệ dẫn dắt với biến trạng thái $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ w]^T$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= bx - cy - xz + w \\ \dot{z} &= -dz + xy \\ \dot{w} &= -ky - rw \end{aligned} \quad (5)$$

và hệ đồng bộ hóa hay hệ bị dẫn dắt với biến trạng thái $\mathbf{Y} = [x_r \ y_r \ z_r \ w_r]^T$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= a(y_r - x_r) + \gamma(x - x_r) \\ \dot{y}_r &= bx_r - cy_r - x_r z_r + w_r + \gamma(y - y_r) \\ \dot{z}_r &= -dz_r + x_r y_r + \gamma(z - z_r) \\ \dot{w}_r &= -ky_r - rw_r + \gamma(w - w_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Từ biểu diễn của trường véc tơ, ta có thể chọn các phần tử lấy toàn bộ độ phân kỳ của hệ để thiết lập hàm $\mathbf{f}_d$, tức là ta sẽ chọn ra các số hạng làm cho phân kỳ khác 0 trong từng thành phần của trường. Cụ thể, các thành phần sau được chọn: $[-ax, -cy, -dz, -rw]^T$ có độ phân kỳ tương ứng là tổng của các đạo hàm riêng của từng thành phần của trường theo các biến x, y, z, w tương ứng:

$$\text{div}(\mathbf{f}) = \partial f_1 / \partial x + \partial f_2 / \partial y + \partial f_3 / \partial z + \partial f_4 / \partial w = -a - c - d - r;$$

các phần tử còn lại của trường sẽ thiết lập hàm $\mathbf{f}_c$ là tự do đối với độ phân kỳ:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= [ay \quad bx - xz + w \quad xy \quad -ky]^T \\ \mathbf{f}_d &= [-ax \quad -cy \quad -dz \quad -rw]^T \end{aligned} \quad (7)$$

Phương trình để xác định hàm Hamiltonian H được tìm dựa vào phương trình (2.2):

$$ay \frac{\partial H}{\partial x} + (bx - xz + w) \frac{\partial H}{\partial y} + xy \frac{\partial H}{\partial z} + (-ky) \frac{\partial H}{\partial w} = 0 \quad (8)$$

Nghiệm H thu được từ (8) có dạng sau đây:

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{a} x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{k} w^2 \right) \quad (9)$$

Đạo hàm của hàm năng lượng H dọc theo quỹ đạo của hệ dẫn dất được tìm là:

$$\dot{H} = bx^2 - cy^2 - dz^2 - \frac{r}{k} w^2 \quad (10)$$

Hàm năng lượng H_r của hệ đồng bộ hóa thu được bằng cách thay véc tơ $X = [x \ y \ z \ w]^T$ bởi véc tơ $Y = [x_r \ y_r \ z_r \ w_r]^T$, tức là:

$$H_r = \frac{1}{2} \left(-\frac{b}{a} x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 + \frac{1}{k} w_r^2 \right) \quad (11)$$

Sự đồng bộ hóa của hai hệ phản ánh rằng hàm năng lượng H của chúng phải tiệm cận đến nhau và do đó sẽ không còn phụ thuộc vào tham số liên kết γ :

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (H_r - H) = 0 \quad (12)$$

Năng lượng cần thiết, tức mức hao phí năng lượng cần thiết để duy trì sự đồng bộ hóa là:

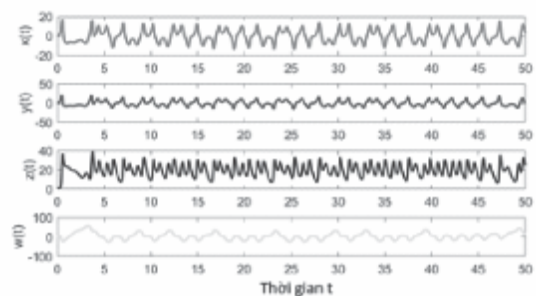
$$P(\gamma) = -\langle \nabla H^T(\mathbf{X}) \mathbf{f}_d(\mathbf{X}) \rangle = bx^2 - cy^2 - dz^2 - \frac{r}{k} w^2 \quad (13)$$

Kết quả đồng bộ hóa dựa trên hàm năng lượng và mức hao phí năng lượng để duy trì sự đồng bộ hóa được minh họa bằng mô phỏng số trong phần dưới đây.

4. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

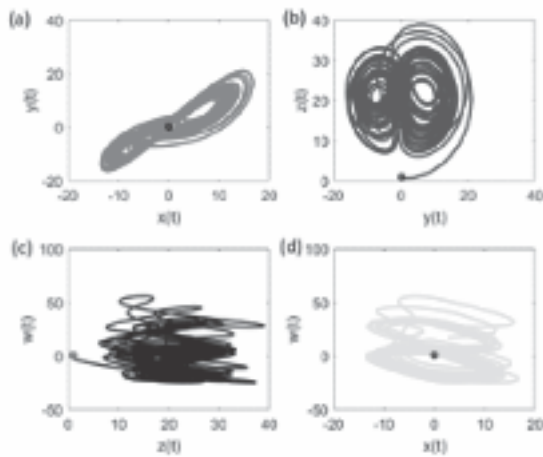
4.1. Chuyển động siêu hỗn loạn của hệ Lorenz bốn chiều

Hệ Lorenz bốn chiều (5) được giải bằng thuật toán số Runge-Kutta bậc bốn, với các tham số $a = 12$, $b = 23$, $c = 1$, $d = 2.1$, $k = 6$, $r = 0.2$. Điều kiện đầu được chọn là $X_0 = [0 \ 0.2 \ 1 \ 1]^T$. Thời gian mô phỏng được lấy là 1000 (đvt: gọi là đơn vị thời gian cho tổng quát), bước thời gian là $\Delta t = 0.01$. Trên Hình 1 hiển thị tiến triển theo thời gian của các nghiệm x , y , z , w của hệ dẫn dất. Với các tham số được chọn ở trên, hệ được chỉ ra là có tính chất chuyển động siêu hỗn loạn (hyperchaos) bởi vì hệ có hai số mũ Lyapunov dương, một số mũ bằng không và một số mũ âm [10]. Dạng điệu theo thời gian của mỗi đáp ứng không có bất kỳ sự lặp lại nào mà là sự phong phú của các dao động mà ở đó chúng vẫn luôn bị chặn trong một miền dao động nào đó. Để minh họa rõ hơn về sự phong phú của dao động mang tính chất hỗn loạn, biểu diễn trên các mặt phẳng pha x - y , y - z , z - w , x - w của ứng xử hệ được trình bày trên Hình 2.



Hình 1. Tiến triển theo thời gian của đáp ứng x , y , z , w trong hệ Lorenz bốn chiều



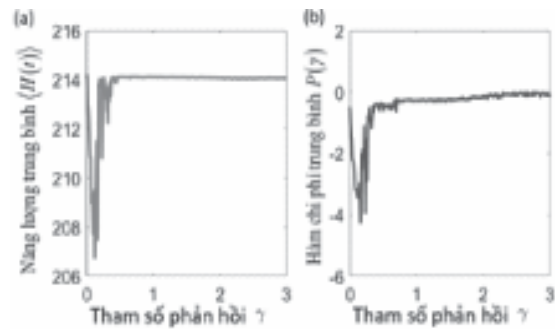


Hình 2. Quỹ đạo pha với chuyển động hỗn loạn của hệ Lorenz bốn chiều trong các mặt phẳng $x-y$, $y-z$, $z-w$, $x-w$.

Tính chất siêu hỗn loạn của hệ chỉ ra đặc điểm khó đoán định về ứng xử của hệ với các điều kiện đầu vào khác nhau, tức nó thuộc loại nhạy cảm với điều kiện đầu hơn cả đối với hệ hỗn loạn thông thường với chỉ một số mũ Lyapunov dương. Tính chất siêu hỗn loạn dẫn tới việc đồng bộ hóa của hệ là một thách thức hơn so với hệ hỗn loạn thông thường. Tuy nhiên, với cách tiếp cận hàm năng lượng Hamiltonian, ta có thể nhận dạng sự đồng bộ hóa trong miền xác định của tham số liên kết γ .

4.2. Sự đồng bộ hóa

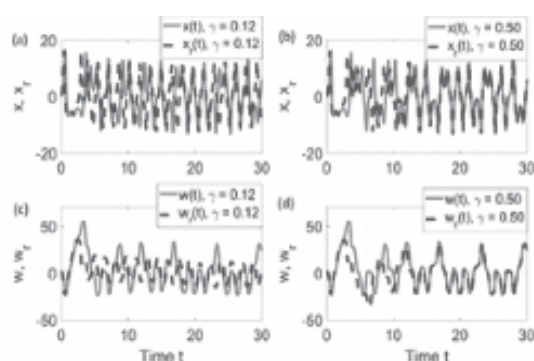
Hệ (6) được đồng bộ hóa với hệ dẫn dắt (5) thông qua sự đóng góp của tham số liên kết γ . Tham số này có ý nghĩa là một tham số phản hồi từ tín hiệu nhận được của hệ dẫn dắt và truyền dẫn cho hệ bị dẫn dắt (6). Tùy vào việc lựa chọn tham số γ mà tính chất đồng bộ hóa có được thực hiện hay không. Điều kiện đầu của hệ bị dẫn dắt (6) được lấy là $Y_0 = [0.5 \ 0.4 \ 2 \ 2]^T$. Điều kiện này có sự thay đổi so với điều kiện đầu của hệ dẫn dắt.



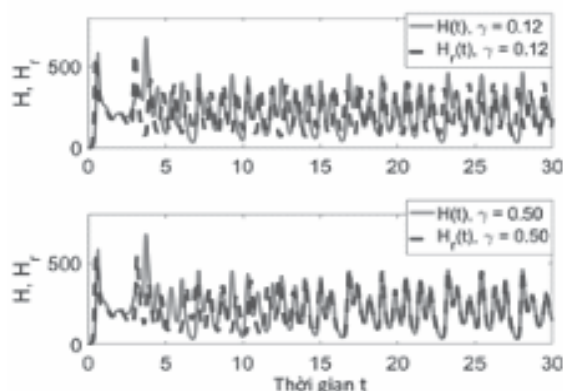
Hình 3. (a) Đồ thị năng lượng trung bình $\langle H(t) \rangle$ và (b) hàm chi phí trung bình theo sự thay đổi của tham số phản hồi γ

Với sự đồng bộ hóa nếu diễn ra thì ứng xử của hai hệ (5) và (6) sẽ tiệm cận nhau khi thời gian t đủ lớn. Hình 3 chỉ ra sự thay đổi của năng lượng trung bình của hệ bị dẫn dắt và sự mức hao phí năng lượng cho sự đồng bộ hóa phụ thuộc vào tham số liên kết γ . Miền tham số liên kết được lấy là $[0, 3]$. Rõ ràng từ Hình 3a, bắt đầu từ khoảng giá trị $\gamma = 0.4$ trở đi, năng lượng trung bình theo thời gian $\langle H(t) \rangle$ tiệm cận tới giá trị hằng số. Điều này phản ánh thực tế rằng, quá trình đồng bộ đạt hiệu quả và đồng bộ hoàn toàn khi năng lượng trung bình của chuyển động hỗn loạn đạt trạng thái không đổi và năng lượng này của cả hai hệ đồng bộ và hệ dẫn dắt là gần như nhau. Trước khi đạt được sự đồng bộ, năng lượng trung bình $\langle H(t) \rangle$ là nhạy cảm với sự thay đổi của tham số liên kết γ . Giá trị năng lượng đồng bộ rơi khoảng 214 (đơn vị năng lượng) và gần như không đổi trên miền khảo sát của γ . Mặc dù sự đồng bộ hóa diễn ra nhưng sự thực là hệ cần một năng lượng nhất định để duy trì sự đồng bộ hóa đó. Hình 3b phản ánh rằng hàm hao phí năng lượng P sẽ tiệm cận về không khi giá trị của tham số liên kết γ đủ lớn. Để hiểu rõ hơn về việc lựa chọn tham số γ ảnh hưởng như thế nào đến sự đồng bộ hóa, ta chọn hai trường hợp là $\gamma = 0.12$ và $\gamma = 0.5$. Giá trị $\gamma = 0.12$ nằm trong miền mà năng lượng trung bình $\langle H(t) \rangle$ tương đối nhạy cảm, và do đó sự đồng bộ hóa là không diễn ra

cho dù ta mô phỏng hệ với thời gian tương đối lớn. Hình 4a và 4c minh họa rằng với $\gamma = 0.12$, các cặp đáp ứng x, x_r và w, w_r của hệ dẫn dất và bị dẫn dất là không thể đồng bộ; giá trị các đáp ứng là khác xa nhau với các điều kiện đầu khác nhau. Tuy nhiên, trên các Hình 4b và 4c ứng với $\gamma = 0.5$ thì sau một khoảng thời gian đủ lớn, chẳng hạn bắt đầu từ 16 (đvt), thì hai hệ bắt đầu đồng bộ. Trước khoảng thời gian này, hai hệ được lấy hai điều kiện đầu khác nhau nên có ứng xử tương đối khác nhau, và ứng xử đó sẽ có xu hướng gần nhau khi thời gian tăng lên. Tương tự như vậy, ta cũng có quan sát về sự đồng bộ đối với năng lượng H và tốc độ thay đổi năng lượng dH/dt trên Hình 5. Mặc dù năng lượng H và tốc độ dH/dt cũng có sự thay đổi hỗn loạn theo đáp ứng nhưng chúng bắt đầu trùng khớp lên nhau khi thời gian t đủ lớn, bắt đầu từ khoảng 16 (đvt). Kết quả trên phản ánh rằng năng lượng có thể được xem là một tiêu chuẩn nhận diện sự đồng bộ hóa của hệ thay đổi như thế nào với việc thiết kế lựa chọn các tham số liên kết γ khác nhau.



Hình 4. Tiến triển theo thời gian của $x(t)$ trong hệ dẫn dất và $x_r(t)$ trong hệ đáp ứng trong hai trường hợp tham số $\gamma = 0.12$ và $\gamma = 0.50$ trong quá trình đồng bộ hóa.



Hình 5. Tiến triển theo thời gian của hàm năng lượng $H(t)$ của hệ dẫn dất và hàm năng lượng $H_r(t)$ của hệ đáp ứng trong hai trường hợp $\gamma = 0.12$ và $\gamma = 0.50$ trong quá trình đồng bộ hóa

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, dựa vào cách tiếp cận hàm năng lượng Hamiltonian, các tác giả đã thu được các kết quả chính sau đây:

- Đã chỉ ra các chuyển động siêu hỗn loạn của hệ Lorenz bốn chiều thông qua biểu diễn tiến triển theo thời gian và biểu diễn trong các mặt phẳng pha khác nhau.

- Dựa vào việc lựa chọn các hàm gradient và hàm tự do với sự phân kỳ (tức không đóng góp vào sự phân kỳ), một hàm năng lượng Hamiltonian cho hệ Lorenz bốn chiều đã thu được và coi như là một sự mở rộng của hàm Hamiltonian của hệ Lorenz ba chiều đã biết.

- Tính chất của sự đồng bộ hóa được minh họa thông qua tiêu chuẩn về giá trị trung bình năng lượng theo thời gian. Việc chọn giá trị của tham số liên kết có thể dựa vào đường cong năng lượng trung bình. Sự đồng bộ hóa xảy ra khi có một lựa chọn tham số liên kết hợp lý mà ở đó năng lượng trung bình của hai hệ dẫn dất và hệ bị dẫn dất tiệm cận nhau.



- Hàm chi phí biểu diễn mức năng lượng cần thiết để duy trì sự đồng bộ hóa cũng được khảo sát. Kết quả chỉ ra rằng khi đạt đồng bộ hóa hoàn toàn, năng lượng chi phí này sẽ tiệm cận giá trị không.

- Trong các khảo sát sau, các tính chất của năng lượng trung bình sẽ được nghiên cứu kỹ hơn với các tham số khác nhau của hệ siêu hỗn loạn mà ở đó tính chất siêu hỗn loạn biểu hiện rất khác nhau trong từng miền tham số. ❖

Ngày nhận bài: **16/6/2025**

Ngày phản biện: **04/7/2025**

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, Jürgen Kurths, “*Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*”. Cambridge University Press (2001).
- [2]. Alexander Balanov, Natalia Janson, Dmitry Postnov, Olga Sosnovtseva, “*Synchronization: From Simple to Complex*”. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2009).
- [3]. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, “*The synchronization of chaotic systems*”. Physics Reports, 366, 1-101 (2002).
- [4]. Michael G. Rosenblum, Arkady S. Pikovsky, and Jürgen Kurths, “*Phase synchronization of chaotic oscillators*”. Physical Review Letters, 76, 1804-1807 (1996).
- [5]. J. Liu, G. Chen, X. Zhao, “*Generalized synchronization and parameters identification of different-dimensional chaotic systems in the complex field*”. Fractals, 29, No. 04, 2150081 (2021).
- [6]. Lijuan Chen, Song Tang, Qingdu Li, Shouming Zhong, “*A new 4D hyperchaotic system with high complexity*”. Mathematics and Computers in Simulation, 146, 44-56 (2018).
- [7]. J. H. Peng, E. J. Ding, M. Ding, “*Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal*”. Physical Review Letters, 76, 904-907 (1996).
- [8]. A. Tamasevicius, G. Mykolaitis, A. Cenys, “*Synchronization of 4D hyperchaotic oscillators*”. Electron. Lett. 32, 1536-1537 (1996).
- [9]. C. Sarasola, F. J. Torrealdea, A. d'Anjou, A. Moujahid, and M. Grana, “*Energy balance in feedback synchronization of chaotic systems*”. Physical Review E, 69, 011606 (2004).
- [10]. Yuming Chen, Qigui Yang, “*Dynamics of a hyperchaotic Lorenz-type system*”. Nonlinear Dynamics, 77, 569-581, (2014).