

PHÂN TÍCH UỐN TĨNH CỦA TẤM COMPOSITE NHIỀU LỚP TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

STATIC BENDING STUDIES OF MULTY-LAYER COMPOSITE PLATES RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

Nguyễn Thanh Tùng

Viện Công nghệ, Tổng cục Công nghiệp Quốc phòng

Email: thanhtung1106@gmail.com

TÓM TẮT

Trên cơ sở lý thuyết tấm cải tiến, nghiên cứu này đã thiết lập bài toán, xây dựng phương trình cân bằng và đề xuất phương pháp giải bằng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích đáp ứng uốn của tấm composite nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng tĩnh. Sự thú vị trong bài báo này là tấm composite đã kết hợp hai vật liệu gốm và kim loại để các đặc trưng cơ tính biến đổi trơn liên tục tại hai lớp bề mặt, điều này làm cho tấm composite tận dụng ưu điểm của cả gốm và kim loại một cách hợp lý. Phương trình cân bằng của tấm composite được tìm ra trên cơ sở nguyên lý công khả dĩ, bằng việc sử dụng phần tử bốn nút, bài báo đã thiết lập phương trình cân bằng cho tấm composite ở dạng phần tử hữu hạn. Bài báo cũng so sánh với kết quả chính xác đã được công bố trước đây để chứng minh lý thuyết tính toán là hoàn toàn phù hợp. Từ đó, bài báo đã khảo sát ảnh hưởng của một loạt các tham số hình học, vật liệu, điều kiện biên đến chuyển vị uốn của tấm composite. Đây là các số liệu tham khảo có giá trị giúp các kỹ sư lựa chọn tham số thiết kế các kết cấu dạng tấm nhiều lớp trong thực tế.

Từ khóa: Phương pháp phần tử hữu hạn; Lý thuyết tấm cải tiến; Composite; Nền đàn hồi.

ABSTRACT

Based on the new shear deformation plate theory, this study has established the problem, find the equilibrium equations and proposed a solution method using the finite element method to analyze the bending response of a multilayer composite plate resting on an elastic foundation under the effect of static load. The interesting thing in this paper is that the composite plate has combined two materials, ceramic and metal, so that the mechanical properties vary smoothly continuously at the two surface layers, which makes the composite plate take advantage of both ceramic and metal reasonably. The equilibrium equation of the composite plate is found on the basis of the principle of possible work, by using four-node elements, the paper has established the equilibrium equation for the composite plate in the form of finite elements. The paper also compares with the previously published exact results to prove that the calculation theory is completely suitable. From there, the paper has investigated the influence of a series of geometric parameters, materials, boundary conditions on the bending displacement of the composite plate. These are valuable reference data to help engineers select design parameters for multi-layer plate structures in practice.

Keywords: Finite element method; New shear deformation plate theory; Composite; Elastic foundations. 

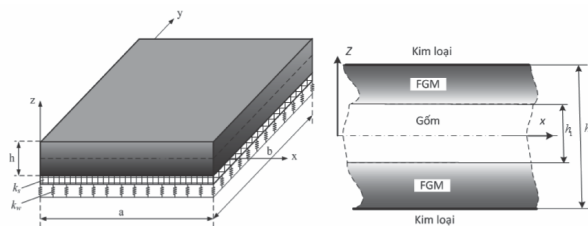
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, các kết cấu nhiều lớp được chế tạo từ vật liệu có cơ tính biến thiên (chủ yếu là từ gốm và kim loại) đã được các nhà khoa học áp dụng để tạo ra các sản phẩm công nghệ cao như loa phụt tên lửa, buồng đốt động cơ tên lửa, vách ngăn lò phản ứng hạt nhân,... Điều này là do vật liệu kết hợp giữa gốm và kim loại có những ưu điểm đặc biệt mà các loại vật liệu khác không có được như khả năng chịu lực tốt, chịu được ma sát và mài mòn, khả năng làm việc được trong môi trường nhiệt độ cao.

Việc nghiên cứu toàn diện đối với các kết cấu làm bằng vật liệu cơ tính biến đổi (từ sự pha trộn giữa gốm và kim loại) là một yêu cầu cấp thiết, trong đó nghiên cứu để hiểu rõ quy luật ứng xử cơ học của các kết cấu này cũng là một đòi hỏi từ thực tế khách quan. Vượng [1] đã đề xuất phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu uốn tĩnh của tấm composite cơ tính biến thiên một lớp tựa trên nền đàn hồi, sự thú vị của nghiên cứu này là xem xét vật liệu phân bố không liên tục theo chiều dày. Tiếp tục thành công này, tác giả Vượng đã đi vào giải quyết bài toán ổn định của tấm composite cơ tính biến thiên [2], tác giả đã làm rõ ảnh hưởng của nhiều tham số như sự phân bố vật liệu, điều kiện hình học của tấm đến khả năng chịu tải nén của tấm này. Ngoài ra, một số kết quả tính toán hay đối với các kết cấu composite cơ tính biến thiên cũng được chỉ ra trong các công trình [3] đến [7].

2. ĐẶT BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

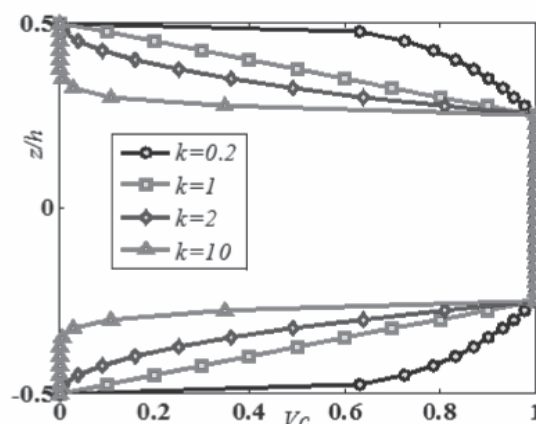
Tấm composite nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi như trên hình 1, các thông số hình học của tấm là chiều dài a , chiều rộng b và chiều cao h , tấm đặt trong hệ tọa độ Oxyz.



Hình 1. Tấm composite tựa trên nền đàn hồi

Tấm gồm ba lớp, lớp giữa là vật liệu gốm đồng nhất, hai lớp bề mặt làm từ gốm và kim loại với tỷ lệ thể tích trong mỗi lớp là $V_m^{(i)}$, $V_c^{(i)}$, giữa hai thành phần này có biểu thức:

$$V_m^{(i)} + V_c^{(i)} = 1 \quad (1)$$



Hình 2. Sự biến đổi của V_c theo chiều dày tấm, tỷ lệ chiều dày ba lớp là 1-2-1

Mô đun đàn hồi và hệ số Poisson trong mỗi lớp thứ i được biểu diễn:

$$\{E^{(i)}, \nu^{(i)}\} = \{E_m^{(i)}, \nu_m^{(i)}\} + \left(\{E_c^{(i)}, \nu_c^{(i)}\} - \{E_m^{(i)}, \nu_m^{(i)}\} \right) V_c^{(i)} \quad (2)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} V_c^{(1)} = \left((2z+h) / (h-h_1) \right)^k; & -0.5h \leq z \leq -0.5h_1 \\ V_c^{(2)} = 1; & -0.5h_1 \leq z \leq 0.5h_1 \\ V_c^{(3)} = \left((2z-h) / (h_1-h) \right)^k; & 0.5h_1 \leq z \leq 0.5h \end{cases} \quad (3)$$

Hình 2 thể hiện sự phụ thuộc của tỷ lệ thể tích V_c theo chiều dày tấm trong trường hợp tỷ lệ chiều dày ba lớp là 1-2-1.

Để xây dựng biểu thức tính toán, bài báo này xuất phát từ lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới:

$$\begin{cases} \{u, v\}(x, y, z) = -z \partial u_b / \{\partial x, \partial y\} - f_z \partial u_s / \{\partial x, \partial y\} \\ u_z(x, y, z) = u_b(x, y) + u_s(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó, $f_z = z - (h/\pi) \sin(z\pi/h)$. Việc sử dụng lý thuyết biến dạng cắt theo biểu thức (4) có nhiều ưu điểm, trong đó có kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt, thể hiện đúng sự phân bố của ứng suất tiếp theo chiều dày, và không cần đến hệ số hiệu chỉnh cắt, nhưng vẫn mô tả đúng đáp ứng cơ học của tấm. Sau đây, bài báo sẽ xây dựng các biểu thức tính toán dựa trên trường chuyển vị này.

Từ việc đạo hàm các thành phần chuyển vị (1), bài báo thu được hai véc tơ biến dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = z \boldsymbol{\varepsilon}_z + f_z \boldsymbol{\varepsilon}_f; \quad \boldsymbol{\gamma}_s = g_z \boldsymbol{\gamma}_{s0} \quad (5)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_z &= \{\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zxy}\}^T; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f &= \{\varepsilon_{fx}, \varepsilon_{fy}, \varepsilon_{fxy}\}^T; \\ \boldsymbol{\gamma}_{s0} &= \{\gamma_{sxz}, \gamma_{syx}\}^T; \quad \varepsilon_{zx} = -\partial^2 u_b / \partial x^2; \\ \varepsilon_{zy} &= -\partial^2 u_b / \partial y^2; \\ \varepsilon_{zxy} &= -2\partial^2 u_b / \partial x \partial y; \\ \varepsilon_{fx} &= -\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_{fy} = -\partial^2 u_s / \partial y^2; \\ \varepsilon_{fxy} &= -2\partial^2 u_s / \partial x \partial y; \quad \gamma_{sxz} = \partial u_s / \partial x; \\ \gamma_{syx} &= \partial u_s / \partial y; \quad g_z = 1 - df_z / dz \end{aligned} \quad (6)$$

Sự tương quan giữa ứng suất của lớp thứ i và biến dạng như sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_i)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^i = \mathbf{G}_b^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i = \mathbf{G}_s^i \boldsymbol{\gamma}_s^i \end{cases} \quad (7)$$

Các thành phần nội lực bao gồm mô men và lực cắt của một điểm bất kỳ thuộc tấm:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_b^i \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^i [z, f_z] dz = [\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_f] \boldsymbol{\varepsilon}_z + [\mathbf{B}_f, \mathbf{D}_f] \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_s^i \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i dz = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{cases} \quad (8)$$

Trong đó:

$$\{\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_f, \mathbf{D}_f\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_b^i \{z^2, z f_z, f_z^2\} dz; \quad \mathbf{A}_s = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_s^i g_z dz \quad (9)$$

Để tìm phương trình cân bằng cho tấm nhiều lớp, bài báo áp dụng nguyên lý công khả dĩ, biểu thức tính toán có dạng:

$$\delta \Pi_{tam} + \delta \Pi_{nen} - \delta \Pi_{luc} = 0 \quad (10)$$

Với $\delta \Pi_{tam}$, $\delta \Pi_{nen}$, $\delta \Pi_{luc}$ lần lượt là công khả dĩ của tấm, công khả dĩ của nền và công khả dĩ của lực ngoài tác dụng vuông góc với tấm.

Công khả dĩ của tấm composite nhiều lớp do biến dạng được xác định:

$$\delta \Pi_{tam} = \int_{\Omega} \left[\sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(\sigma_x^i \delta \varepsilon_x^i + \sigma_y^i \delta \varepsilon_y^i + \tau_{xy}^i \delta \gamma_{xy}^i + \tau_{xz}^i \delta \gamma_{xz}^i + \tau_{yz}^i \delta \gamma_{yz}^i \right) dz d\Omega \right] = \int_{\Omega} \left[\sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(-M_x^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial x^2} - S_x^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial x^2} - M_y^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial y^2} - S_y^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial y^2} - 2M_{xy}^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial x \partial y} - 2S_{xy}^i \frac{\partial^2 \delta u_b}{\partial x \partial y} - 2Q_{xz}^i \frac{\partial \delta u_s}{\partial x} - Q_{yz}^i \frac{\partial \delta u_s}{\partial y} \right) dz d\Omega \right] \quad (11)$$

Công khả dĩ của nền đàn hồi tác dụng lên tấm nhiều lớp có dạng:

$$\delta \Pi_{nen} = \int_{\Omega} \left(k_w u_z \delta u_z + k_s \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \delta \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \delta \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (12)$$

Công sinh ra do ngoại lực tác dụng vuông góc với mặt phẳng tấm có dạng:

$$\delta \Pi_{luc} = \int_{\Omega} q \delta u_z dA = \int_{\Omega} q \delta (u_b + u_s) d\Omega \quad (13)$$

Với q là ngoại lực vuông góc với mặt phẳng tấm. Các biểu thức (11) đến (13) được thế vào phương trình (10), bài báo thu được các phương trình cân bằng của tấm nhiều lớp:

$$\begin{aligned} u_b \frac{\partial}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + k_w u_z + k_s \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + q &= 0 \\ u_s \frac{\partial S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} + k_w u_z + k_s \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + q &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Để giải hệ phương trình (14), bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, đây là phương pháp có nhiều ưu điểm, đặc biệt là đối với điều kiện biên bất đối xứng. Tấm composite được chia ra các phần tử chữ nhật bốn nút, mỗi nút có sáu bậc tự do:

$$\mathbf{u}_e = \sum_{i=1}^4 \left\{ u_{bi}, u_{si}, \left(\frac{\partial u_b}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial u_b}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial u_s}{\partial y} \right)_i \right\}^T \quad (15)$$

Bằng các phép biến đổi, phương trình cân bằng (13) được đưa về dạng chuẩn của phương pháp phần tử hữu hạn:

$$\sum_e (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^f) \sum_e \mathbf{u}_e = \sum_e \mathbf{P}_e \quad (16)$$

Giải phương trình (16), bài báo tìm được chuyển vị uốn của tấm composite.

3. TÍNH TOÁN SỐ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Sự tin cậy của lý thuyết tính toán

Phần này đưa ra ví dụ so sánh chuyển vị uốn của tấm composite FGM để làm rõ sự tin cậy của lý thuyết đã trình bày ở phần trên, tấm có các thông số $a, h = a/10$, vật liệu tấm có đặc trưng cơ tính $E_c = 380 \text{ GPa}$, $E_m = 70 \text{ GPa}$, $v_c = v_m = 0.3$, tải trọng tác dụng lên tấm gồm hai dạng là phân bố đều và phân bố hình sin. Chuyển vị lớn nhất của tấm được tính toán theo công thức $Cv^* = 10w_{\max} h^3 E_c / Pa^4$ và được so sánh như trong bảng 1, trong đó tài liệu [5] sử dụng lời giải dạng giải tích để đưa ra kết quả chính xác. Bằng việc nhìn vào các số liệu so sánh như trong bảng 1, dễ dàng thấy rằng kết quả của bài báo rất sát với các kết quả đã công bố, điều này minh chứng sự đúng đắn và tin cậy của phương pháp tính toán mà bài báo xây dựng ở phần trên.

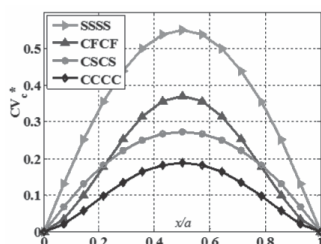
Bảng 1. So sánh chuyển vị lớn nhất của tấm composite

Chuyển vị	Tải trọng phân bố đều			Tải trọng hình sin		
	k = 0	k = 1	k = 2	k = 0	k = 1	k = 2
Bài báo	0.46	0.92	1.18	0.29	0.58	0.75
Kết quả chính xác [5]	0.46	0.92	1.19	0.29	0.58	0.75

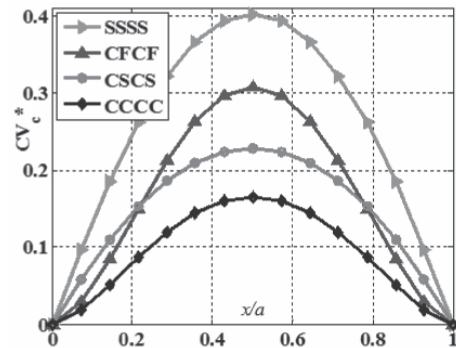
3.2. Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số

Tấm composite ba lớp có tỷ lệ chiều dày các lớp là 1-2-1, tấm được chế tạo từ gốm và kim loại với các tham số vật liệu như ở phần trên, thông số hình học của tấm $a = 0.5$ m chiều rộng b thay đổi tại mỗi trường hợp, chiều dày $h = a/10$. Thông số khảo sát là chuyển vị tại vị trí $y = b/2$ được tính toán theo công thức $CV_c^* = 100w_z h^3 E_c / Pa^4$.

- Ảnh hưởng của điều kiện biên: Để xem xét ảnh hưởng của điều kiện biên đến đáp ứng uốn của tấm, bài báo tính toán ở bốn điều kiện biên được ký hiệu tương ứng là SSSS (tất cả các cạnh tựa đơn), CFCF (hai cạnh đối diện ngàm và hai cạnh còn lại tựa đơn), CSCS (hai cạnh đối diện ngàm và hai cạnh còn lại tựa đơn), CCCC (tất cả các cạnh tựa đơn đều ngàm), kết quả tính toán chuyển vị tại vị trí $y = b/2$ được vẽ trên hình 3 tương ứng với trường hợp chưa xét đến nền đàn hồi và có xét đến nền đàn hồi. Bài báo nhận thấy: Tấm có các cạnh bị ngàm (CCCC) thì chuyển vị là nhỏ nhất, điều này là do số bậc tự do bị hạn chế nhiều nhất, nên tấm trở lên cứng nhất. Và với tấm có tất cả các cạnh đều tựa đơn (SSSS) thì chuyển vị của tấm là lớn nhất. Ngoài ra, đường độ võng tại giữa tấm cũng thay đổi hình dạng khi điều kiện biên thay đổi. Chuyển vị của tấm khi có nền đàn hồi nhỏ hơn so với tấm không tựa trên nền đàn hồi, điều này là độ cứng của tấm đã được tăng lên khi tựa trên nền đàn hồi, do vậy khả năng chịu tải của tấm cũng tăng khi có nền đàn hồi.



(a) $K_w = 0, K_s = 0$



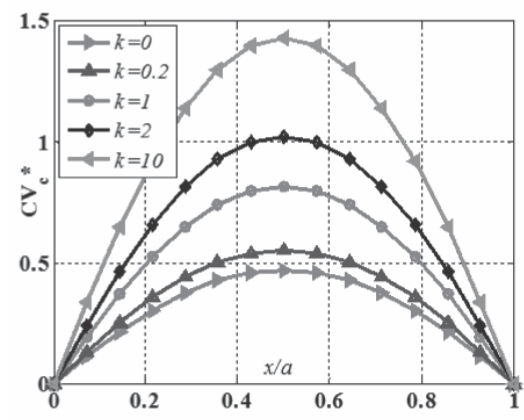
(b) $K_w = 25, K_s = 5$

Hình 3. Đường độ võng tại giữa tấm ở các điều kiện biên khác nhau, $b = a, k = 0.2$

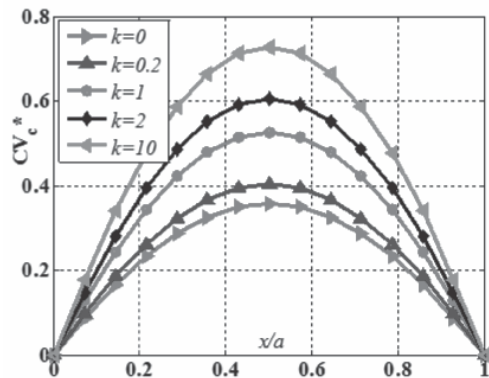
- Ảnh hưởng của chỉ số mũ thể tích k : Sự thay đổi của độ võng giữa tấm composite phụ thuộc vào chỉ số mũ thể tích k được vẽ trên hình 4, bài báo nhận thấy:

+ Sự tăng lên của chuyển vị tỷ lệ thuận với sự tăng lên của chỉ số mũ thể tích k , nguyên nhân là do khi số mũ k tăng lên thì khối lượng kim loại trong tấm tăng lên, làm độ cứng của tấm composite giảm.

+ Tuy nhiên mức độ tăng lên của chuyển vị thể hiện rõ rệt nhất khi chỉ số mũ thể tích k tăng từ 0 đến 2, còn khi số mũ k tăng từ 2 đến 10 thì chuyển vị của tấm cũng tăng lên nhưng mức độ tăng không nhiều.

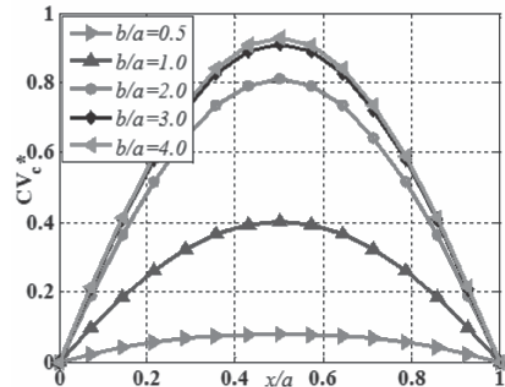


(a) $K_w = 0, K_s = 0$



b) $K_w = 25, K_s = 5$

Hình 4. Đường độ võng tại giữa tấm ở các giá trị k khác nhau, $b/a = 1$, SSSS



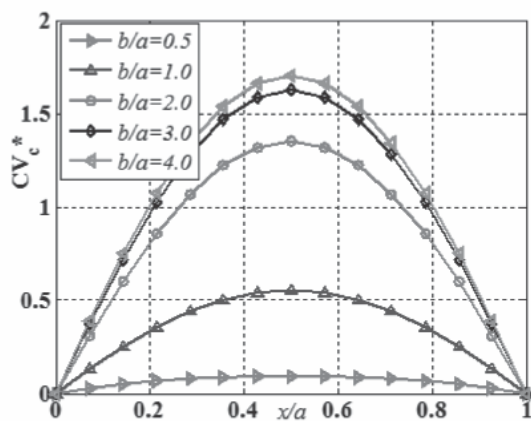
(b) $K_w = 25, K_s = 5$

Hình 5. Đường độ võng tại giữa tấm ở các giá trị b/a khác nhau, $k = 0.2$, SSSS

- Ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm b/a : Trên hình 5 vẽ sự biến đổi của đường độ võng tại giữa tấm phụ thuộc vào tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm b/a , các kết quả tính toán này thể hiện:

+ Giá trị của tỷ lệ chiều dài hai cạnh tấm b/a càng lớn thì chuyển vị lớn nhất của tấm composite tăng lên, điều này là do độ cứng của tấm giảm xuống, tuy nhiên khi tỷ lệ $b/a > 3$ thì chuyển vị tăng lên không rõ rệt.

+ Nền đàn hồi làm giảm chuyển vị của tấm trong các trường hợp khác nhau của tỷ lệ hai cạnh tấm b/a .



(a) $K_w = 0, K_s = 0$

4. KẾT LUẬN CHUNG

Bài báo kết hợp giữa lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới và phương pháp mô phỏng hữu hạn để phân tích chuyển vị uốn của tấm composite nhiều lớp tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, trong đó tấm được làm từ gốm và kim loại được pha trộn theo tỷ lệ thể tích nhất định. Phần tử bốn điểm nút, mỗi nút gồm sáu bậc tự do để xây dựng phương trình cân bằng và thuật toán giải. Trên cơ sở các kết quả tính toán và phân tích, bài báo rút ra một số nhận xét quan trọng sau đây: Tấm có các cạnh ngàm thì chuyển vị là nhỏ nhất, điều kiện biên vừa ảnh hưởng đến hình dạng của đường độ võng của tấm composite, đồng thời điều kiện biên cũng ảnh hưởng đến giá trị lớn nhất của chuyển vị. Chỉ số mũ thể tích k làm cho hàm lượng kim loại trong tấm tăng lên hoặc giảm, tức là độ cứng của tấm cũng tăng hoặc giảm, do vậy làm thay đổi độ võng của tấm, cụ thể ở đây là độ võng tăng lên cùng với sự tăng lên của chỉ số mũ thể tích k . Đây là nghiên cứu có giá trị khoa học thiết thực, làm tài liệu tham chiếu khi thiết kế cho các kỹ sư. ❖

Ngày nhận bài: 02/6/2025

Ngày phản biện: 15/6/2025

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Vuong, D. V (2025), “*Nghiên cứu uốn tĩnh của tấm FGM có vật liệu phân bố không liên tục*”. Tạp chí Khoa học và Công nghệ Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội, 61, số 5A, tr. 94- 99.
- [2]. Vuong, D. V (2025), “*Nghiên cứu ổn định của tấm FGM có vật liệu phân bố không liên tục*”. Tạp chí Cơ khí Việt Nam, 327, tr. 78-84.
- [3]. Aman. G, Chalak. H. D, Anupam. C (2022), “*Bending analysis of functionally graded sandwich plates using Hozt including transverse displacement effects*”. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 50 (10), pp. 3563-3577.
- [4]. Ouinas. D, Fekirini. H, Olay. J. A, Achour. B, Boukendakdji. M (2022), “*New hybrid HSDT for bending, free vibration, and buckling analysis of FGM plates (2D & quasi-3D)*”. Smart Structures and Systems, 29 (3), pp. 395-420.
- [5]. Zenkour. A. M (2009), “*Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates*”. Applied Mathematical Modelling, 2009, 30 (1), pp. 67-84.
- [6]. Pham. T. D, Pham. Q. H, Phan. V. D, Nguyen. H. N, Do. V. T (2019), “*Free vibration analysis of functionally graded shells using an edge-based smoothed finite element method*”. Symmetry, 11 (5), 684.
- [7]. Ke. T. V, Minh. P. V, Dung. N. T, Thai. L. M, Thom. D. V (2024), “*Flexoelectric effect on bending and free vibration behaviors of piezoelectric sandwich FGP nanoplates via nonlocal strain gradient theory*”. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2024, 12 (4), 6567-6596.