

PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ RÀNG BUỘC ĐIỀU KIỆN BIÊN SỬ DỤNG PHẦN MỀM MATLAB

DYNAMIC ANALYSIS OF CONSTRAINED MECHANICAL SYSTEMS
UNDER BOUNDARY CONDITIONS USING MATLAB

Nguyễn Trường Giang*, Ngô Văn Thanh

Khoa Cơ khí – Ô tô và Xây dựng, Trường Đại học Điện lực

*Email: giangnt1@epu.edu.vn

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, phần mềm MATLAB được ứng dụng để tự động hóa quá trình thiết lập và giải hệ phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ nhiều bậc tự do. Phương pháp này cho phép phân tích sâu các đặc trưng động lực học với độ linh hoạt cao trong việc thay đổi cấu hình và điều kiện ràng buộc. Để chứng minh tính hiệu quả, nghiên cứu đã thực hiện mô phỏng bài toán động lực học của Robot 3R chịu ràng buộc bởi các điều kiện biên cụ thể, từ đó đưa ra những đánh giá định lượng chính xác về phản hồi của hệ thống.

Từ khóa: Động lực học; Điều kiện ràng buộc; Hệ phương trình vi phân chuyển động; Matlab.

ABSTRACT

In this study, an automated methodology for formulating and solving the differential equations of motion for multi-degree-of-freedom mechanical systems is developed using MATLAB. This approach enables an in-depth analysis of dynamic characteristics while offering high flexibility in accommodating varying system configurations and boundary constraints. To demonstrate its efficacy, the proposed method is applied to simulate the dynamic behavior of a 3R robot subjected to specific boundary conditions. The simulation results yield accurate quantitative assessments of the system's kinematic and dynamic responses, validating the robustness and correctness of the theoretical framework.

Keywords: Dynamics; Boundary conditions; Differential equations of motion; Matlab.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Hiện nay, việc giải quyết các bài toán cơ học chịu ràng buộc điều kiện biên vẫn là một thách thức lớn, đặc biệt khi độ phức tạp của hệ thống tăng cao. Mặc dù các phương pháp giải tích truyền thống có thể áp dụng hiệu quả cho hệ ít bậc tự do, nhưng đối với các hệ đa vật hoặc cơ hệ phức tạp, việc tính toán thủ công trở nên cực kỳ khó khăn và dễ phát sinh sai số [1, 2]. Các phần mềm thiết kế và mô phỏng thương mại như Catia, Solidworks hay TopSolid dù hỗ trợ quan sát trực quan chuyển động, nhưng lại bộc lộ hạn chế trong việc tùy biến thuật toán hoặc can thiệp sâu vào các thông số động lực học. Điều này gây trở ngại cho việc phân tích chi tiết các đặc trưng động lực học đặc thù, cũng như việc xây dựng mô hình kết hợp với các hệ thống điều khiển cho cơ hệ.

Trên thực tế, có nhiều cách tiếp cận để giải quyết bài toán động lực học như phương trình Lagrange dạng nhân tử, nguyên lý D'Alembert, hay phương trình Newton-Euler [3]. Mặc dù phương trình Newton-Euler hay nguyên lý D'Alembert rất hiệu quả trong việc phân tích lực tác động lên từng cấu kiện đơn lẻ, chúng lại bộc lộ hạn chế khi đối mặt với các hệ thống cơ điện tử phức tạp do khối lượng tính toán thủ công lớn và khó tự động hóa bằng thuật toán số.

Ngược lại, phương pháp nhân tử Lagrange loại một cho phép bao quát toàn bộ các ràng buộc hình học lẫn động học của cơ hệ thông qua các nhân tử lực liên kết, tạo điều kiện thuận lợi cho việc lập trình ma trận hóa trên phần mềm Matlab. Tuy nhiên, thách thức lớn nhất của cách tiếp cận này là làm phát sinh hệ phương trình vi phân - đại số hỗn hợp có bậc cao, gây khó khăn cho các bộ giải số thông thường về mặt hội tụ và thời gian máy tính xử lý. Việc tích hợp phương pháp “Tối thiểu hóa

bậc tự do” (Coordinate Reduction Method) [4] vào quy trình tính toán chính là giải pháp cốt lõi để loại bỏ các nhân tử Lagrange, chuyển đổi hệ phương trình vi phân - đại số phức tạp thành hệ phương trình vi phân thường, độc lập tuyến tính. Giải pháp tích hợp này không chỉ tối ưu hóa tốc độ xử lý số, tránh hiện tượng tích tụ sai số tích phân theo thời gian, mà còn đảm bảo tính chính xác cho các dữ liệu động học đầu ra của các phần tử cuối khi vận hành trong không gian có điều kiện biên nghiêm ngặt.

2. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC HỆ RANG BUỘC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Đối với hệ cơ học bất kỳ, hệ phương trình vi phân chuyển động luôn đưa được về dạng như sau:

$$[a]\ddot{x} + [b]\dot{x} = \{f\} - [B]^T \{\lambda\} \quad (1)$$

Trong đó:

- $\{a\}$: Ma trận hệ số của thành phần gia tốc;
- $\{b\}$: Ma trận hệ số của thành phần vận tốc;
- $\{f\}$: Vector biểu diễn các thành phần ngoại lực và lực thế;
- $\{\lambda\}$: Vector hằng số Lagrange có xét đến ảnh hưởng của điều kiện biên đến cơ hệ;
- $[B]$: Ma trận biểu diễn các điều kiện biên.

Vì trong phương trình có chứa vector $\{\lambda\}$ nên chưa thể ứng dụng các chương trình giải hệ phương trình vi phân sẵn có của phần mềm Matlab. Để có thể giải được thì vector $\{\lambda\}$ cần phải được khử bằng cách tìm ma trận $[T]$ sao cho:

$$[T].[B]^T = [0] \quad (2)$$

Ma trận $[T]$ là ma trận Null do phần mềm Matlab cung cấp. Khi có ma trận $[T]$, nhân trái hệ phương trình (1) với ma trận $[T]$, ta có:



$$[T][a]\ddot{x} + [T][b]\dot{x} = [T]\{f\} \quad (3)$$

Khi xét tới điều kiện biên của cơ hệ, điều kiện biên của cơ hệ luôn có thể đưa về dạng như sau:

$$[B]\dot{x} = -[\dot{B}]\dot{x} + \dot{g} \quad (4)$$

Trong đó: $\dot{g}$ là thành phần gồm các hằng số và biểu thức chứa x .

Kết hợp hệ phương trình (3) và (4), ta có:

$$\begin{cases} [T][a]\ddot{x} + [T][b]\dot{x} = [T]\{f\} \\ [B]\dot{x} = -[\dot{B}]\dot{x} + \dot{g} \end{cases} \quad (5)$$

Bằng cách ghép ma trận, ta có thể đưa hệ phương trình (5) về dạng sau:

$$[A]\ddot{x} = \{D\} \Rightarrow \ddot{x} = [A]^{-1}\{D\} \quad (6)$$

Trong đó:

$$[A] = \begin{bmatrix} [T][a] \\ [B] \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\{D\} = \begin{bmatrix} [T](\{f\} - [b]\dot{x}) \\ -[\dot{B}]\dot{x} + \dot{g} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Cuối cùng, hệ phương trình (6) có thể giải được bằng các module giải hệ phương trình vi phân sẵn có của phần mềm Matlab.

3. ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT CÓ RÀNG BUỘC ĐIỀU KIỆN BIÊN

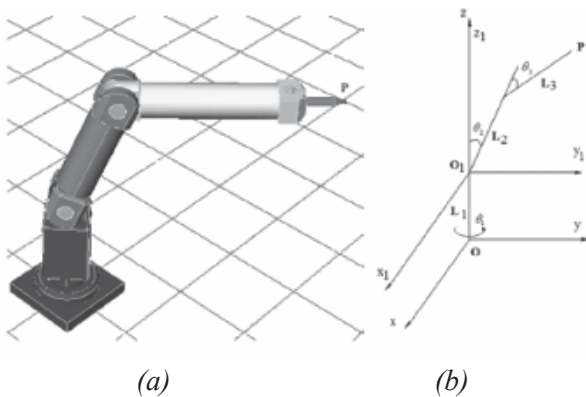
3.1. Thiết lập hệ phương trình vi phân chuyển động

Trong nghiên cứu này, mô hình Robot ba bậc tự do (3R) như trên Hình 1 được chọn để thiết lập hệ phương trình vi phân chuyển động một cách tự động dựa trên chương trình viết trong phần mềm Matlab. Các thông số của mô hình Robot 3R như Bảng 1.

Bảng 1. Các thông số của mô hình Robot 3R

Thông số \ Khâu	Khâu 1	Khâu 2	Khâu 3
Khối lượng m_i (kg)	4	3	3
Chiều dài L_i (m)	0,3	0,3	0,5
Bán kính thân r_i (m)	0,04	0,04	0,04
Tenxơ quán tính I_i (kg.m ²)	$\begin{bmatrix} \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 r_1^2}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 r_2^2}{4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{m_3 L_3^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 L_3^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 r_3^2}{4} \end{bmatrix}$

Các hệ quy chiếu được chọn để mô tả Robot 3R như trên Hình 1(b). Trong đó, hệ quy chiếu Oxyz là hệ quy chiếu cố định gắn trên đế của Robot, hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$ gắn trên khối tâm của khâu 1 có chuyển động quay quanh trục z một góc θ_1 . Khâu 2 được coi như chuyển động theo khâu 1 và quay tương đối so với khâu 1 một góc θ_2 quanh trục x_1 . Khâu 3 quay theo khâu 2 và quay tương đối so với khâu 2 một góc θ_3 quanh trục x_1 .



Hình 1. Mô hình Robot ba bậc tự do

Với các thông số của Robot 3R, phương thức chọn các hệ quy chiếu của Robot 3R trình bày như Hình 1, tổng động năng và thế năng của mô hình Robot 3R được xác định với việc sử dụng chương trình xây dựng trên phần mềm Matlab như sau:

$$\begin{aligned}
 T &= T_1 + T_2 + T_3 \\
 &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{8} m_2 L_2^2 \left[(\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2)^2 + (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 \left[\left(\frac{1}{2} L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \cos \theta_2 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \left(\frac{1}{2} L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \sin \theta_2 \right) \right]^2 \quad (9) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 \left[\cos^2 \theta_1 (\dot{\theta}_1^2 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2) \left(\frac{1}{2} L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \sin \theta_2 \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

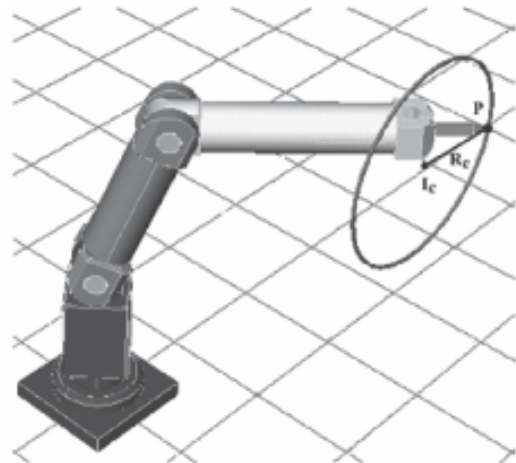
$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 + V_3 \\
 &= gm_3 \left(\frac{1}{2} L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \cos \theta_2 \right) + \frac{1}{2} gm_2 L_2 \cos \theta_2 \quad (10)
 \end{aligned}$$

3.2. Phân tích điều kiện biên

Điều kiện biên ràng buộc đầu mút P của

dụng cụ mà Robot 3R cầm nắm là đường tròn tâm $I_c(X_c; Y_c; Z_c) = I_c(0; 0,55; 0,32)$ (m) bán kính $R_c = 0,15$ m trong mặt phẳng song song với mặt phẳng xz của hệ quy chiếu cố định như trên Hình 2. Từ đó, ta có phương trình quỹ đạo của điểm P như sau:

$$(X_p - X_c)^2 + (Y_p - Y_c)^2 + (Z_p - Z_c)^2 = R_c^2 \quad (11)$$



Hình 2. Điều kiện ràng buộc của điểm P

Phương trình ràng buộc của quỹ đạo điểm P trong trường hợp này như sau:

$$H = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 (L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \sin \theta_2) - R_c \cos(t) - X_c \\ \cos \theta_1 (L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \sin \theta_2) - Y_c \\ L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + L_2 \cos \theta_2 - R_c \sin(t) - Z_c \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

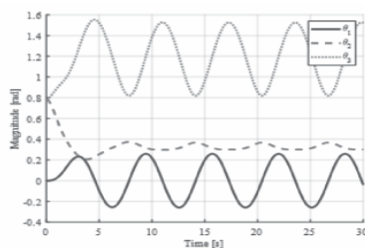
Vận dụng phương pháp phân tích động lực học hệ ràng buộc điều kiện biên hệ phương trình vi phân chuyển động của mô hình Robot 3R được xây dựng có dạng như hệ phương trình (5). Từ đó, hệ phương trình (5) có thể chuyển thành hệ phương trình (6) để sử dụng phần mềm Matlab để phân tích động lực học hệ ràng buộc điều kiện biên của mô hình Robot 3R.

4. PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC ROBOT 3R CÓ RÀNG BUỘC ĐIỀU KIỆN BIÊN

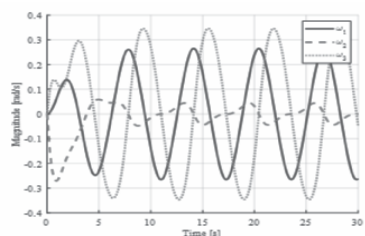
Hệ phương trình vi phân chuyển động

của mô hình Robot 3R có kết hợp với ràng buộc quỹ đạo của điểm P là đường tròn được thiết lập và giải tự động nhờ chương trình lập trình sử dụng phần mềm Matlab.

Đáp ứng động học theo thời gian của các khớp thuộc Robot 3R được thể hiện chi tiết trên Hình 3, bao gồm đáp ứng chuyển vị góc (Hình 3a) và vận tốc góc (Hình 3b) trong miền thời gian khảo sát từ 0 đến 30 giây. Trong giai đoạn quá độ (khoảng 5 giây đầu), các đồ thị chuyển vị góc xuất phát từ các giá trị ban đầu, nhanh chóng đạt trạng thái dao động ổn định. Tại trạng thái xác lập, cả ba tọa độ khớp đều biến thiên tuần hoàn, phản ánh chính xác đặc tính động học của cơ hệ khi thực thi quỹ đạo liên tục. Tương thích với quy luật dịch chuyển đó, các đặc tính vận tốc góc trên Hình 3b cũng nhanh chóng ổn định và duy trì dao động với biên độ không đổi. Kết quả phân tích tính toán chuyển vị và vận tốc góc này hoàn toàn phù hợp về mặt logic với quy luật chuyển động của điểm cuối (điểm P) dưới tác động của ràng buộc hình học dạng đường tròn.



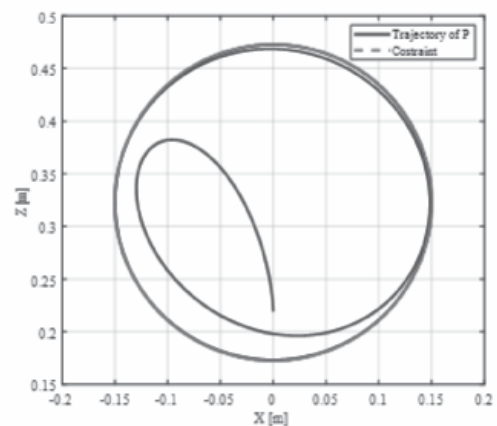
a) Chuyển vị góc



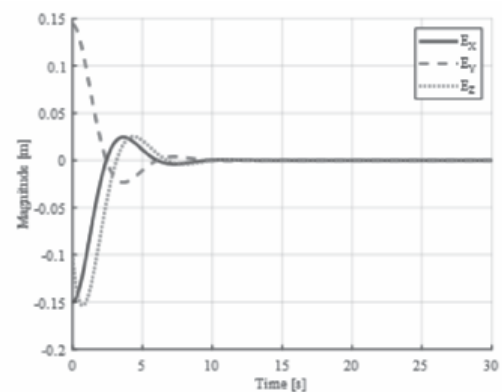
b) Vận tốc góc

Hình 3. Chuyển vị góc và vận tốc góc các khâu của Robot 3R

Quỹ đạo chuyển động của điểm P trong mặt phẳng song song với mặt phẳng XOZ được mô tả trên Hình 4. Trong đó, đường nét liền màu xanh biểu diễn quỹ đạo chuyển động của điểm P và đường nét đứt màu đỏ thể hiện ràng buộc điều kiện biên là cung tròn. Từ vị trí ban đầu, điểm P di chuyển tự do theo một đường cong và tiệm cận nhanh về phía đường biên. Ngay khi tiếp cận đường biên, quỹ đạo của điểm P bám khít và trùng khớp hoàn toàn với đường biên.



Hình 4. Quỹ đạo của điểm P trong mặt phẳng song song với mặt phẳng XOZ



Hình 5. Sai số giữa quỹ đạo của điểm P so với điều kiện biên

Để đánh giá định lượng chất lượng bám biên, Hình 5 mô tả sai số vị trí của điểm P so với điều kiện biên theo ba trục tọa độ trong 30

giây. Do sự sai lệch giữa vị trí ban đầu và biên ràng buộc, cơ hệ tồn tại sai số tĩnh ban đầu khá lớn. Tuy nhiên, các thành phần sai số này nhanh chóng hội tụ. Sau khoảng 7 giây, toàn bộ cơ hệ bước vào trạng thái xác lập khi các đường sai số tiệm cận và duy trì ổn định ở giá trị 0 m. Kết quả đánh giá sai số khẳng định khả năng hội tụ nhanh, độ chính xác cao của thuật toán và đồng nhất với các kết quả phân tích động học trên Hình 3 và Hình 4.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu đã đề xuất phương pháp phân tích bài toán động lực học ràng buộc điều kiện biên cho sử dụng phần mềm Matlab. Bằng việc kết hợp phương pháp Lagrange với các công cụ tính toán số, hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ được thiết lập một cách tự động và chính xác. Thuật toán “Tối thiểu hóa bậc tự do” được ứng dụng cho phép giải hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có cấu trúc ràng buộc phức tạp. Các kết quả đạt được trong nghiên cứu này không chỉ phục vụ như một tài liệu tham khảo trực quan, hữu ích cho công tác giảng dạy, học tập và nghiên cứu chuyên sâu trong lĩnh vực cơ học mà còn khẳng

định rõ nét khả năng mở rộng của phương pháp. Đây chính là cơ sở khoa học để triển khai áp dụng cho các cơ hệ đa vật thể có cấu trúc phức tạp và số bậc tự do lớn hơn. Đồng thời, việc làm chủ phương pháp giải toán động lực học này là tiền đề kỹ thuật để mở ra hướng phát triển cho các bài toán tối ưu hóa quỹ đạo và xây dựng giải pháp điều khiển thông minh cho các hệ thống cơ điện tử hiện đại. ❖

Ngày nhận bài: 08/5/2026

Ngày phản biện: 20/5/2026

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Schiehlen, W., Guse, N., Seifried, R., “*Multibody dynamics in computational mechanics and engineering applications*”. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 195(41-43), 5509-5522, 2006.
- [2]. Kim, H.W., Yoo, W.S., “*MBD applications in design*”. Int. J. Non-Linear Mech. 53, 55-62, 2013.
- [3]. Haim Baruh, “*Analytical Dynamics*”. WCB McGraw-Hill, 1999.
- [4]. Farif. M.L. Amirouche, “*Computational Methods in Multibody Dynamics*”. The University of Illinois at Chicago, 1992.