

NGHIÊN CỨU ỔN ĐỊNH CỦA TẤM FGM CÓ VẬT LIỆU PHÂN BỐ KHÔNG LIÊN TỤC

STABILITY STUDY OF FGM PLATES WITH DISCONTINUOUS MATERIAL DISTRIBUTION

Đào Văn Vượng

Viện Thuộc phóng Thuốc nổ, Tổng cục Công nghiệp Quốc phòng

Email: vuong.mta@gmail.com

TÓM TẮT

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để trình bày nghiên cứu về ổn định của tấm có cơ tính biến thiên (FGM) tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, tuy nhiên sự phân bố của vật liệu không liên tục từ mặt này đến mặt kia của tấm. Các biểu thức tính toán được thiết lập từ lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, sau đó dựa trên nguyên lý công khả dĩ để tìm ra phương trình cân bằng cho tấm chịu tải trọng nén, phần tử bốn nút, mỗi nút sáu bậc tự do được bài báo sử dụng để giải quyết phương trình cân bằng vừa tìm được. Sự tin cậy của phương pháp tiếp cận được kiểm chứng bằng cách so sánh với các kết quả đã công bố. Bài báo cũng tiến hành khảo sát ảnh hưởng của các tham số hình học, sự phân bố vật liệu, điều kiện biên và độ cứng nền đến đáp ứng ổn định của tấm này, đây là tài liệu tham khảo có giá trị để tìm ra các tham số thiết kế phù hợp cho tấm FGM để khả năng chịu tải của tấm là tốt nhất.

Từ khóa: Ổn định của tấm; Không liên tục; Phương pháp phần tử hữu hạn.

ABSTRACT

This study uses the finite element method to present the study of the stability of a plate with variable mechanical properties (FGM) resting on a two-factor elastic foundation, but the distribution of the material is not continuous from one side to the other of the plate. The calculation expressions are established from the new shear deformation theory, then based on the principle of possible work to find the equilibrium equation for the plate under compressive load, the four-node element, each node has six degrees of freedom, is used in the article to solve the equilibrium equation just found. The reliability of the approach is verified by comparison with published results. The paper also investigates the influence of geometric parameters, material distribution, boundary conditions and foundation stiffness on the stability response of this plate, which is a valuable reference for finding suitable design parameters for FGM plates to achieve the best load-bearing capacity of the plate.

Keywords: Stability of plates; Discontinuous; Finite element method.

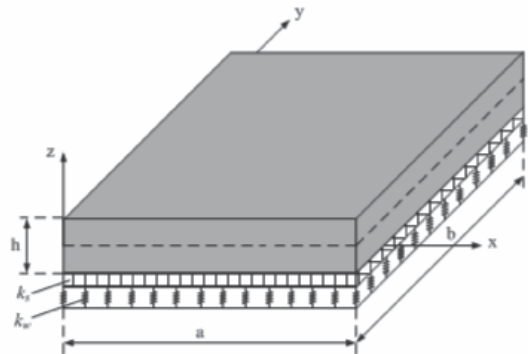
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Sự phát triển của nhiều ngành công nghiệp hiện đại đòi hỏi phải có những vật liệu mới có khả năng đáp ứng làm việc trong môi trường khắc nghiệt như nhiệt độ cao, ma sát, mài mòn lớn, khả năng chống tia bức xạ hạt nhân,... Và một trong những loại vật liệu mới đã được tìm ra là vật liệu cơ tính biến thiên (gọi tắt theo tiếng Anh là FGM), đây là loại vật liệu pha trộn giữa gốm và kim loại, sự pha trộn này theo một quy luật nhất định, điều này đảm bảo cho cơ tính của các kết cấu được chế tạo từ loại vật liệu này biến đổi liên tục từ mặt này đến mặt kia của kết cấu. Nghiên cứu đáp ứng cơ học của các kết cấu làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên đã nhận được sự quan tâm, nghiên cứu của đông đảo các nhà khoa học trong nước và ngoài nước, điển hình trong số đó là các công trình khoa học [1]-[5], trong đó lời giải dạng giải tích và lời giải phần tử hữu hạn đã được các tác giả vận dụng linh hoạt để giải quyết bài toán đặt ra.

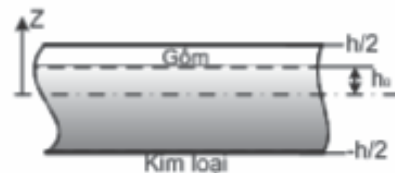
Nhưng trong quá trình tạo ra loại vật liệu này, có thể do sai sót trong quá trình chế tạo hoặc do cố ý của nhà khoa học, để gia cường đáng kể thêm đặc tính của loại vật liệu nào đó, người ta có thể tạo ra loại vật liệu FGM có vật liệu phân bố không liên tục. Việc nghiên cứu để tìm ra quy luật ứng xử cơ học của các kết cấu làm bằng loại vật liệu này là một yêu cầu cần thiết, giúp các nhà khoa học hiểu hơn khả năng chịu lực của chúng, từ đó vận dụng vào chế tạo sản phẩm cụ thể đáp ứng công việc thực tế. Xuất phát từ thực tế đó, bài báo này đề xuất phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu ổn định tĩnh của tấm FGM có vật liệu phân bố không liên tục, từ đó đưa đến cái nhìn một cách có hệ thống và khoa học về khả năng chịu tải nén của tấm FGM này.

2. MÔ HÌNH BÀI TOÁN PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tấm FGM tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, có chiều dài các cạnh lần lượt là a và b , chiều dày tấm h được thể hiện như trên Hình 1. Tấm được đặt trong hệ tọa độ Đề-các Oxyz, trong đó trục Oz vuông góc với mặt phẳng tấm.



Hình 1. Mô hình tấm FGM và các thông số hình học tựa trên nền đàn hồi hai hệ số



Hình 2. Vật liệu tấm FGM phân bố không liên tục theo chiều dày tấm

Tấm FGM được tạo ra từ hai thành phần chính là gốm và kim loại với tỷ lệ thể tích tương ứng là V_g và V_m , sự phân bố của hai loại vật liệu này tuân theo quy luật của hàm số mũ như sau:

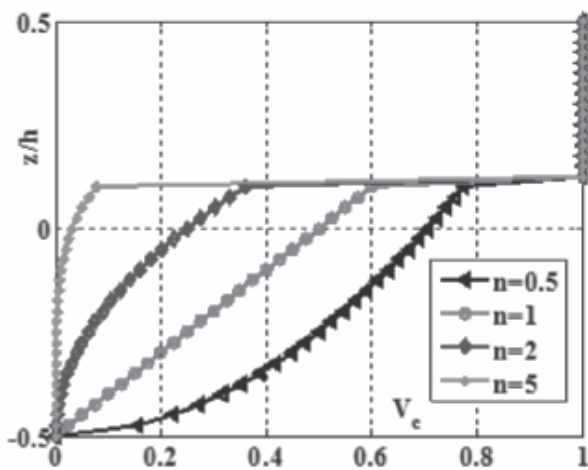
$$V_m + V_g = 1; \quad V_g = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (1)$$

Trong đó, n là số không âm, thể hiện quy luật phân bố vật liệu, người ta gọi chỉ số mũ thể tích vật liệu.



Trong trường hợp tấm FGM có các thành phần vật liệu phân bố không liên tục, các đặc trưng cơ tính (Mô đun đàn hồi E, hệ số Poisson ν) là hàm số của biến chiều dày z theo quy luật:

$$\begin{cases} \{E_1, \nu_1\} = \{E_m, \nu_m\} + (\{E_c, \nu_c\} - \{E_m, \nu_m\})V_c & -0.5h \leq z \leq 0 \\ \{E_2, \nu_2\} = \{E_m, \nu_m\} + (\{E_c, \nu_c\} - \{E_m, \nu_m\})V_c & 0 \leq z \leq h_0 \\ \{E_3, \nu_3\} = \{E_c, \nu_c\} & h_0 \leq z \leq 0.5h \end{cases} \quad (2)$$



Hình 3. Sự phân bố tỷ lệ V_c tấm FGM không liên tục vật liệu trong trường hợp $h_0 = h/10$

Biểu thức (2) chứng tỏ khi $h_0 = h/2$ thì vật liệu tấm biến đổi trơn liên tục theo chiều dày, nếu $h_0 < h/2$ thì vật liệu tấm biến đổi không liên tục.

Hình 3 trình bày sự phân bố tỷ lệ thể tích của vật liệu gốm V_c dọc chiều dày của tấm FGM trong trường hợp $h_0/h = 10$.

Để giải quyết bài toán đặt ra, bài báo xuất phát từ lý thuyết biến dạng cắt kiểu mới, theo đó trường chuyển vị tại một điểm bất kỳ của tấm được viết ở dạng sau:

$$\begin{cases} u_x = -z \frac{\partial w_{zb}}{\partial x} - k_z \frac{\partial w_{zs}}{\partial x} \\ u_y = -z \frac{\partial w_{zb}}{\partial y} - k_z \frac{\partial w_{zs}}{\partial y} \\ w_z = w_{zb} + w_{zs} \end{cases} \quad (3)$$

Với, $r_z = -z/4 + 5z^3/3h^2$.

Sự khác biệt của lý thuyết biến dạng cắt ở bài báo này so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin là thành phần chuyển vị theo trục z là w được chia ra thành hai phần, một phần tỷ lệ với uốn w_b và một phần tỷ lệ với thành phần cắt w_s .

Trường biến dạng của tấm được viết ở dạng:

$$\alpha = z\alpha_z + k_z\alpha_k; \quad \eta_s = g_z\eta_{s0} \quad (4)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \{\alpha_{zx}, \alpha_{zy}, \alpha_{zz}\}^T; \quad \alpha_k = \{\alpha_{kx}, \alpha_{ky}, \alpha_{kz}\}^T; \\ \eta_{s0} &= \{\eta_{sxx}, \eta_{syy}\}^T; \quad \alpha_{zx} = -\partial^2 w_{zb} / \partial x^2; \quad \alpha_{zy} = -\frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial y^2}; \\ \alpha_{xy} &= -\frac{2\partial^2 w_{zb}}{\partial x \partial y}; \quad \alpha_{kx} = -\frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial x^2}; \quad \alpha_{ky} = -\frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial y^2}; \\ \alpha_{kz} &= -\frac{2\partial^2 w_{zs}}{\partial x \partial y}; \quad \eta_{sxx} = \frac{\partial w_{zs}}{\partial x}; \quad \eta_{syy} = \frac{\partial w_{zs}}{\partial y}; \quad g_z = 1 - dr_z / dz \end{aligned} \quad (5)$$

Trường ứng suất của tấm tại lớp thứ i :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_i)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}^i = \mathbf{H}_b^i \alpha^i \\ \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{xz} \\ \eta_{yz} \end{bmatrix}^i = \mathbf{H}_s^i \eta_s^i \end{cases} \quad (6)$$

Trường nội lực của điểm bất kỳ thuộc tấm gồm các thành phần mô men, lực cắt được tìm ra trên cơ sở tích phân trường ứng suất

theo chiều dày tấm, bài báo thu được biểu thức trường nội lực như sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{H}_b^i \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z, k_z \end{bmatrix} dz = [\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_k] \alpha_z + [\mathbf{B}_k, \mathbf{D}_k] \alpha_k \\ \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{H}_s^i \begin{bmatrix} \eta_{xz} \\ \eta_{yz} \end{bmatrix} dz = \mathbf{A} \eta_{z0} \end{cases} \quad (7)$$

Với:

$$\{\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_k, \mathbf{D}_k\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{H}_b^i \{z^2, zk_z, k_z^2\} dz; \mathbf{A}_s = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{H}_s^i g_z^2 dz \quad (8)$$

Để thiết lập phương trình cân bằng cho tấm, bài báo sử dụng nguyên lý công khả dĩ như sau:

$$\delta \Pi_{\text{tam}} + \delta \Pi_{\text{nen}} - \delta \Pi_{\text{luc}} = 0 \quad (9)$$

Trong đó, $\delta \Pi_{\text{tam}}$, $\delta \Pi_{\text{nen}}$, $\delta \Pi_{\text{luc}}$ lần lượt là công khả dĩ của tấm FGM do biến dạng, công khả dĩ do nền và công khả dĩ của ngoại lực tác dụng lên tấm FGM. Chúng lần lượt được xác định như sau:

$$\delta \Pi_{\text{tam}} = \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \begin{pmatrix} -M_x \frac{\partial^2 \delta w_{zb}}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 \delta w_{zs}}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_{zb}}{\partial y^2} \\ -S_y \frac{\partial^2 \delta w_{zs}}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_{zb}}{\partial x \partial y} \\ -2S_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_{zs}}{\partial x \partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta w_{zs}}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_{zs}}{\partial y} \end{pmatrix} dz d\Omega \quad (10)$$

Công khả dĩ liên quan đến nền đàn hồi như sau:

$$\delta \Pi_{\text{nen}} = \int_{\Omega} \left(k_w w_z \delta w_z + k_s \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \delta \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \delta \frac{\partial w_z}{\partial y} \right) \right) d\Omega \quad (11)$$

Trong đó, k_w và k_s là hai tham số của nền đàn hồi.

Công khả dĩ do ngoại lực tác dụng lên tấm FGM được xác định như sau:

$$\delta \Pi_{\text{luc}} = \int_{\Omega} P_n \delta \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right) dA \quad (12)$$

Với P_n là ngoại lực tác dụng trong mặt phẳng của tấm FGM, đây cũng là lực nén tác dụng trong mặt phẳng của tấm. Lúc này, kết hợp giữa các biểu thức (9)-(12), bài báo rút ra được phương trình cân bằng cho tấm FGM ở dạng rút gọn như sau:

$$\begin{aligned} \delta w_{zb}: \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ + P_n \left(\frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial x^2} \right) + k_w w_z + k_s \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \delta w_{zs}: \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} \\ + P_n \left(\frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{zb}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_{zs}}{\partial x^2} \right) + k_w w_z + k_s \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Để giải quyết phương trình cân bằng (13), bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, theo đó tấm FGM được chia thành các phần tử chữ nhật bốn điểm nút, mỗi nút có bốn bậc tự do:

$$\mathbf{q}_e = \sum_{i=1}^4 \left\{ w_{zbi}, w_{zsi}, \left(\frac{\partial w_{zb}}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial w_{zs}}{\partial x} \right)_i, \left(\frac{\partial w_{zb}}{\partial y} \right)_i, \left(\frac{\partial w_{zs}}{\partial y} \right)_i \right\}^T \quad (14)$$

Thông qua các phép biến đổi, phương trình cân bằng (13) được đưa về dạng rút gọn như sau:

$$\left(\sum_e (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^f) + P_n \sum_e \mathbf{K}_e^f \right) \sum_e \mathbf{q}_e = \mathbf{0} \quad (15)$$

Giải phương trình (15), ta thu được tải tới hạn gây mất ổn định cho tấm FGM tựa trên nền đàn hồi hai hệ số.



3. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN VÀ THẢO LUẬN

3.1. Kiểm chứng độ tin cậy

Phần này so sánh tải tới hạn của tấm FGM hoàn hảo, tấm được tạo ra từ Al_2O_3 (gốm) và Al (kim loại), các thông số hình học của tấm gồm $a = b$, $h = a/10$, các tham số vật liệu $E_c = 380$ GPa, $E_m = 70$ GPa, $\nu_c = \nu_m = 0.3$. Tấm chịu liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh, lực nén trên cả bốn cạnh, tải trọng tới hạn $P^* = P_n a^2 / E_m h^3$. Sự so sánh kết quả tính toán tải tới hạn với các kết quả trong các bài báo [4-5] được thể hiện như trên Bảng 1, sai số lớn nhất là 1.10%, điều này chứng tỏ phương pháp tính toán của nghiên cứu này đảm bảo độ tin cậy cần thiết.

Bảng 1. Tải tới hạn P^* của tấm FGM phụ thuộc số mũ n

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 10$
[4]	9.28	4.66	3.63	2.72
[5]	9.28	4.66	3.63	2.72
Bài báo	9.24	4.67	3.65	2.75
Sai số (%)	0.43	0.21	0.55	1.10

3.2. Khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố đến ổn định của tấm FGM không hoàn hảo về vật liệu

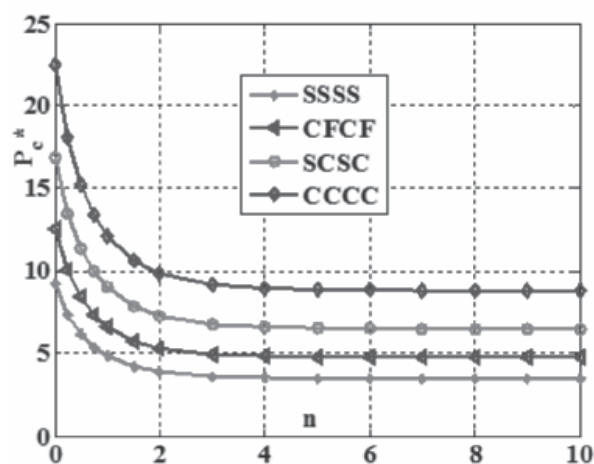
Tấm FGM có vật liệu không hoàn hảo như trên hình 3, các tham số kích thước của tấm gồm $a = b = 1$ m, chiều dày $h = a/10$, các tham số vật liệu được lấy như ở mục trên, tấm chịu nén trên cả bốn cạnh. Để thuận lợi cho việc biểu diễn kết quả tính toán, nghiên cứu này đưa ra thông số tải trọng không thứ nguyên $P_c^* = P_n a^2 / E_m h^3$.

- Khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên và tỷ lệ thành phần vật liệu: Thay đổi điều kiện biên và chỉ số mũ thể tích vật liệu n từ 0 đến 10, tải tới hạn của tấm FGM không hoàn hảo về vật liệu được thể hiện trên các hình 4 và hình 5. Các kết quả tính toán này thể hiện:

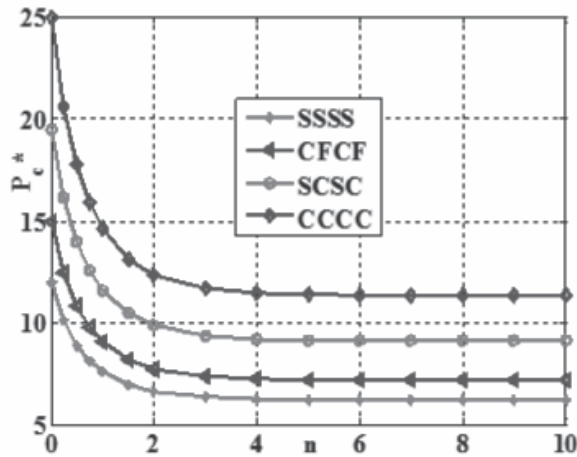
+ Khi chỉ số mũ thể tích vật liệu n tăng lên, tỷ lệ thể tích vật liệu gốm trong tấm giảm xuống, tấm sẽ mềm hơn, vì vậy tải tới hạn của tấm FGM giảm xuống, điều này chứng tỏ chỉ số mũ thể tích n tăng lên làm cho khả năng chịu tải nén của tấm FGM giảm xuống.

+ Khi tấm có các điều kiện biên khác nhau thì tải tới hạn cũng khác nhau, tải tới hạn lớn nhất đối với tấm ngàm bốn cạnh, và tải tới hạn nhỏ nhất đối với tấm tựa đơn bốn cạnh. Điều này đồng nghĩa với khả năng chịu tải nén của tấm ngàm tất cả các cạnh là lớn nhất và khả năng chịu tải nén của tấm tựa đơn bốn cạnh là kém nhất.

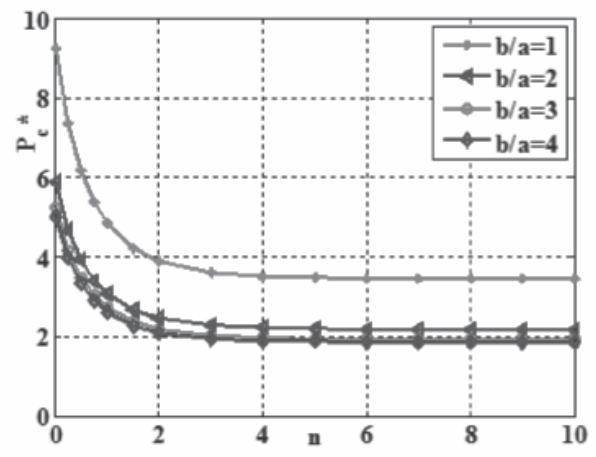
+ Khi tấm có tính đến nền đàn hồi, nền đàn hồi làm tấm FGM trở nên cứng hơn, do vậy tải tới hạn tăng lên.



Hình 4. Tải tới hạn của tấm FGM không hoàn hảo thay đổi phụ thuộc vào điều kiện biên, tấm chịu nén 4 cạnh, $K_w = 0$, $K_s = 0$, $h_0 = h/10$



Hình 5. Tải tới hạn của tấm FGM không hoàn hảo thay đổi phụ thuộc vào điều kiện biên, tấm chịu nén 4 cạnh, $K_w = 40$, $K_s = 4$, $h_0 = h/10$

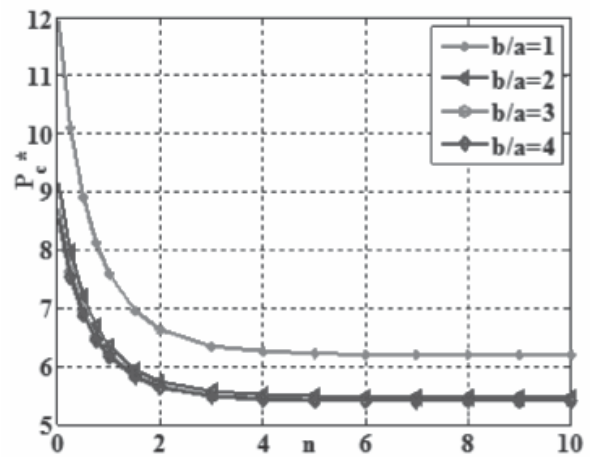


Hình 6. Tải tới hạn của tấm FGM không hoàn hảo thay đổi phụ thuộc vào tỷ lệ b/a , tấm chịu nén 4 cạnh, $K_w = 0$, $K_s = 0$, $h_0 = h/10$

- Khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm b/a và tỷ lệ thể tích vật liệu: Thay đổi chiều dài các cạnh tấm sao cho tỷ lệ chiều dài b/a tăng từ 1 đến 4, kết quả tính toán tải tới hạn của tấm FGM được trình bày trong các hình 6 và hình 7. Bài báo rút ra một số nhận xét như sau:

+ Khi tăng tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm b/a thì tấm FGM trở nên mềm hơn, do vậy tải tới hạn của tấm giảm xuống, tức là khả năng chịu tải của tấm kém hơn. Và khi tỷ lệ b/a lớn hơn 2 thì giá trị của tải tới hạn cũng không biến động nhiều.

+ Khi tăng chỉ số mũ thể tích n từ 0 đến 2 thì tải tới hạn của tấm thay đổi nhiều, nhưng khi n có giá trị lớn hơn 2 thì tải tới hạn không thay đổi nhiều.



Hình 7. Tải tới hạn của tấm FGM không hoàn hảo thay đổi phụ thuộc vào tỷ lệ b/a , tấm chịu nén 4 cạnh, $K_w = 40$, $K_s = 4$, $h_0 = h/10$

4. KẾT LUẬN

Bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán và phân tích ổn định tĩnh của tấm được chế tạo bằng vật liệu có cơ tính biến đổi không hoàn hảo về sự phân bố vật liệu, tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Trên cơ sở các kết quả tính toán, bài báo đưa ra một số kết luận chính như sau: Phương pháp phần tử hữu hạn mà bài báo áp dụng đảm bảo độ tin cậy

để giải quyết bài toán ổn định của tấm FGM; Khi chỉ số mũ thể tích vật liệu tăng lên, tỷ lệ chiều dài các cạnh tấm tăng lên thì khả năng chịu tải nén của tấm giảm xuống. Tấm có điều kiện biên ngàm tất cả các cạnh thì có tải tới hạn lớn nhất, còn tấm có điều kiện biên tựa đơn bốn cạnh thì có tải tới hạn nhỏ nhất. ❖

Ngày nhận bài: **18/02/2025**

Ngày phản biện: **10/3/2025**

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Hoang-Nam, N.; Tran, C. T.; Doan, T. L.; Van-Duc P.; Thom, V. D.; Phung, V. M., “*Research on the buckling behavior of functionally graded plates with stiffeners based on the third-order shear deformation theory*”. Materials, 2019, 12 (8), pp.1- 29.
- [2]. Nam, H. V; Duc, H. D.; Khoa, M. N.; Thom, D. V.; Hong, T. T., “*Phase-field buckling analysis of cracked stiffened functionally graded plates*”. Composite Structures, 2019, 217, pp. 50-59.
- [3]. Thai, H. T.; Kim, S.E., “*Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation*”. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 75, pp. 34-44.
- [4]. Yaghoobi, H.; Fereidoon, A., “*Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations: An assessment of a simple refined nth-order shear deformation theory*”. Composites Part B: Engineering, 2014, 62, pp. 54-64.
- [5]. Sobhy, M.; Radwan, A. F., “*A New Quasi 3D Nonlocal Plate Theory for Vibration and Buckling of FGM Nanoplates*”. International Journal of Applied Mechanics, 2017, 9 (1), pp. 1-29.