

GIẢI HỆ THANH SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN KẾT HỢP VỚI LẬP TRÌNH MATLAB

SOLVE FRAME SYSTEM PROBLEMS BY USING FINIT ELEMENT METHOD
COMBINED MATLAB PROGRAMMING APPLICATION

ThS. Đào Văn Lập

Khoa Cơ sở cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email: vanlap@vimaru.edu.vn

TÓM TẮT

Bài toán về hệ thanh siêu tĩnh trong Sức bền vật liệu đa phần đều là các bài toán phức tạp, có nhiều bậc tự do đòi hỏi một khối lượng tính toán lớn. Hiện nay, phương pháp PTHH đã và đang được sử dụng rất rộng rãi trong tính toán cơ khí, kỹ thuật... Tuy nhiên, khi áp dụng phương pháp này luôn gặp các khó khăn về mặt toán học. Bài báo này đưa ra ý tưởng về việc ứng dụng lập trình MATLAB kết hợp phương pháp PTHH để đi giải quyết một số bài toán về hệ thanh siêu tĩnh bậc cao của môn học Sức bền vật liệu.

Từ khóa: Phương pháp PTHH; Phần mềm MATLAB; Hệ thanh siêu tĩnh.

ABSTRACT

Problems on superstatic bar systems in Strength of Materials are mostly complex problems with many degrees of freedom requiring a large amount of calculation. Currently, the FEM method has been widely used in mechanical and engineering calculations... However, when applying this method, there are always mathematical difficulties. This article presents the idea of applying MATLAB programming combined with the FEM method to solve some problems on high-order superstatic bar systems in the subject Strength of Materials.

Keywords: FEM method; MATLAB software; Frame.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong tính toán sức bền vật liệu, việc bắt gặp bài toán siêu tĩnh là một nội dung thường gặp và phổ biến. Việc giải các bài toán hệ siêu tĩnh được thực hiện bởi nhiều phương pháp, nhưng nhìn chung, có thể đưa về hai nhóm chính: nhóm các phương pháp giải tích và nhóm các phương pháp số. Với việc phát

triển mạnh của công nghệ thông tin, các phương pháp số thể hiện nhiều ưu điểm, trong đó phải kể đến phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Đây là phương pháp rất hiệu quả và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, trong đó có việc tính toán giải quyết các bài toán siêu tĩnh của hệ kết cấu. Trong phương pháp PTHH, các dữ liệu đầu vào như sơ đồ tính, sơ đồ tải trọng đều được số hóa nên

việc nhập dữ liệu đầu vào rất dễ dàng. Toàn bộ sơ đồ tính được đưa về ma trận độ cứng, sơ đồ tải trọng được đưa về véc tơ tải trọng nút. Việc tính chuyển vị nút còn lại là giải phương trình cân bằng dưới dạng ma trận. Vấn đề đặt ra là khi gặp những hệ kết cấu lớn có nhiều phần tử thanh, nhiều bậc tự do là các thành phần chuyển vị tại nút sẽ gặp khó về mặt tính toán. Điều đó dẫn đến việc phải kết hợp phần mềm toán vào phương pháp PTHH để phân tích hệ kết cấu được đơn giản hơn [1].

Trên cơ sở phân tích tính năng của các phần mềm toán học thông dụng, cùng với kinh nghiệm ứng dụng các phần mềm toán vào giảng dạy, tác giả nhận thấy việc áp dụng MATLAB vào phương pháp PTHH để đi giải quyết bài toán về hệ thanh siêu tĩnh bậc cao là rất hiệu quả đối với việc học tập và nghiên cứu của sinh viên và học viên cao học. Phần mềm MATLAB có các ưu điểm vượt trội với các bài toán ma trận, các bài toán cần được số hóa, cần được lập trình và tự động hóa cao. Phần mềm MATLAB trợ giúp cho việc tính toán, vẽ đồ thị rất ưu việt. Các lệnh của MATLAB mạnh và hiệu quả, cho phép giải các loại hình toán khác nhau, đặc biệt hữu dụng cho các hệ phương trình tuyến tính hay các bài toán ma trận được gặp nhiều trong phương pháp PTHH [2].

2. TRÌNH TỰ TÍNH NỘI LỰC, CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH SIÊU TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PTHH ỨNG DỤNG PHẦN MỀM MATLAB

2.1. Phương pháp PTHH tính nội lực, chuyển vị của hệ thanh siêu tĩnh

Trong phương pháp PTHH - mô hình chuyển vị, thành phần chuyển vị được xem là đại lượng cần tìm. Chuyển vị được lấy xấp xỉ trong dạng một hàm đơn giản gọi là hàm xấp

xi (hay còn gọi là hàm chuyển vị). Áp dụng phương pháp PTHH - mô hình chuyển vị để phân tích nội lực, chuyển vị được triển khai theo các bước sau [1]:

- Rời rạc hóa miền khảo sát V thành các miền con Ve (với hệ thanh là các phần tử thanh). Đặt ký hiệu cho các phần tử, các nút và các bậc tự do tương ứng với số chuyển vị tại các nút.
- Thiết lập phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad [1]$$

Trong đó:

- $\{U\}$ – Véc tơ chuyển vị nút của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung;
- $[K]$ – Ma trận độ cứng của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung;
- $\{F\}$ – Véc tơ tải trọng nút của toàn hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung.

Để giải được hệ phương trình [1], định thức của ma trận $[K]$ cần phải khác 0 (det $[K]$ khác 0), tức là phương trình không suy biến. Với bài toán kết cấu, điều này chỉ đạt được khi điều kiện biên được thỏa mãn (kết cấu phải bất biến hình). Đó là điều kiện cho trước một số chuyển vị nút nào đó bằng 0 hay bằng một giá trị xác định, ngoài ra phải thỏa mãn điều kiện liên tục tại các nút của hệ kết cấu. Sau khi đưa vào các điều kiện biên, điều kiện liên tục, phương trình cân bằng mới được biểu diễn như sau:

$$[k] \{u\} = \{f\} \quad [2]$$

Trong đó:

- $\{u\}$ – Được xây dựng từ $\{U\}$ sau khi loại bỏ các thành phần chuyển vị bằng 0;
- $[k]$ – Được xây dựng từ $[K]$ sau khi

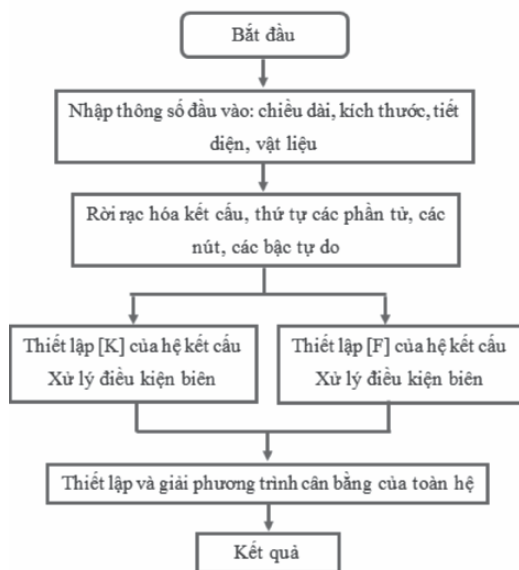
loại bỏ các hàng và cột tương ứng với thành phần chuyển vị bằng 0;

- $\{f\}$ – Được xây dựng từ $\{F\}$ sau khi loại bỏ các hàng tương ứng với thành phần chuyển vị bằng 0.

- Giải hệ phương trình cân bằng: $\{u\} = [k]^{-1} \{f\}$
- Xác định nội lực: Từ kết quả thu được, kết hợp với các điều kiện biên xác định được vectơ chuyển vị nút của từng phần tử trong hệ tọa độ riêng. Từ đó xác định được nội lực, cũng như biến dạng, ứng suất của điểm bất kỳ trong phần tử nhờ các quan hệ đã có trong Cơ học kết cấu và Lý thuyết đàn hồi.

2.2. Trình tự giải bài toán hệ thanh siêu tĩnh bằng phương pháp PTHH

Bài toán phân tích hệ thanh siêu tĩnh bằng phương pháp PTHH được tác giả viết chương trình tính toán ứng dụng phần mềm MATLAB theo sơ đồ khối sau [2].

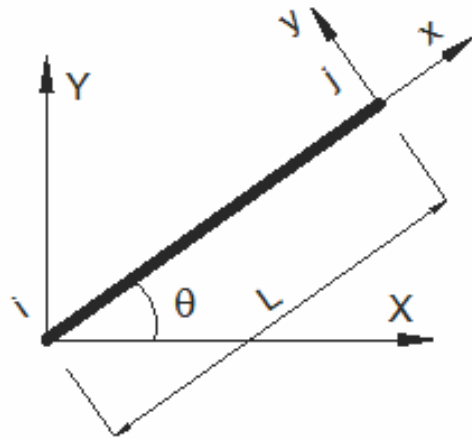


Hình 1. Sơ đồ khối chương trình

2.3. Xây dựng các hàm trong MATLAB tính chuyển vị và nội lực hệ thanh phẳng

2.3.1. Phần tử thanh trong hệ thanh phẳng và hàm ma trận độ cứng

Xét phần tử thanh trong khung i-j trong bài toán phẳng, có độ cứng EA, EI, chiều dài L. Tại mỗi nút sẽ có 3 bậc tự do: chuyển vị theo phương dọc trục, chuyển vị theo phương vuông góc trục và chuyển vị xoay. Hệ tọa độ riêng của phần tử là xy. Hệ tọa độ chung của kết cấu là XY có phương lập với hệ tọa độ riêng một góc θ [1] (Hình 2).



Hình 2. Phần tử thanh trong hệ khung phẳng

Ma trận độ cứng của phần tử thanh phẳng [1].

Với: $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$

$$k = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2 & \frac{6I}{L} S & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2\right) & -\left(AS^2 + \frac{12I}{L^3} C^2\right) & \frac{6I}{L} C \\ 4I & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & \frac{6I}{L} S & -\frac{6I}{L} C & 2I \\ AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2 & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} S & -\left(AC^2 + \frac{12I}{L^3} S^2\right) & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & -\frac{6I}{L} S \\ AS^2 + \frac{12I}{L^3} C^2 & \frac{6I}{L} C & -\frac{6I}{L} S & \left(AS^2 + \frac{12I}{L^3} C^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) CS & \frac{6I}{L} C \\ \text{Symmetry} & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad [3]$$

Chương trình con xây dựng độ cứng cho phần tử khung phẳng:

```

1 function k = LocalStiffMatrixForFrameElement(E,I,A,theta,L)
2 C = cosd(theta);
3 S = sind(theta);
4 t1 = 12*I/L^2;
5 t2 = 6*I/L;
6 k = [A^2*C^2 + t1*S^2, (A*t1)*C*S, -t2*S, -(A^2*C^2+t1*S^2), -(A*t1)*C*S, -t2*S;
7      0, A^2*S^2+t1*C^2, t2*C, -(A*t1)*C*S, -(A^2*S^2+t1*C^2), t2*C;
8      0, 0, 4*I, t2*S, -t2*C, 2*I;
9      0, 0, 0, A^2*C^2+t1*S^2, (A*t1)*C*S, t2*S;
10     0, 0, 0, 0, A^2*S^2+t1*C^2, -t2*C;
11     0, 0, 0, 0, 0, 4*I];
12 k = symmetrify(k);

```

2.3.2. Các hàm MATLAB trong bài toán tính chuyển vị và lực tại nút hệ thanh phẳng

LocalStiffMatrixforFrameElement(E,I,A,theta,L): Hàm chương trình con để xây dựng độ cứng cho mỗi phần tử [3], [4].

k1 = LocalStiffMatrixforFrameElement(E,I1,A,theta1,L): Tạo ma trận độ cứng phần tử thanh số 1 [3], [4].

```

K = zeros(12,12);
K(1,1:6) = k1(1,1:6);
K(2,2:6) = k1(2,2:6);
K(3,3:6) = k1(3,3:6);
K(4,4:6) = k1(4,4:6);
K(5,5:6) = k1(5,5:6);
K(6,6:6) = k1(6,6:6);
K = symmetrify(K);

```

Tạo ma trận tổng kết cấu K(12x12) là một ma trận vuông 0, ghép ma trận k1 vào trong ma trận K.

k2 = LocalStiffMatrixforFrameElement(E,I2,A,theta2,L): Tạo ma trận độ cứng phần tử thanh số 2.

k3 = LocalStiffMatrixforFrameElement(E,I3,A,theta3,L): Tạo ma trận độ cứng phần tử thanh số 3.

Ghép lần lượt ma trận k2 và k3 vào ma trận tổng K.

disp= [u1;v1;phi1;u2;v2;phi2;u3;v3;phi3;u4;v4;phi4]: Tạo ma trận cột chuyển vị nút

cho kết cấu.

u1=0; v1=0; phi1=0; u4=0; v4=0; phi4=0; Khai báo điều kiện biên tại nút số 1 và số 4.

FM = [F1x;F1y;M1;F2x;F2y;M2;F3x;F3y;M3;F4x;F4y;M4]: Tạo ma trận cột lực nút.

F2x=40000; %N F2y=0; M2=0;F3x=0; F3y=0; M3=500; %N-m : Khai báo lực nút tại nút số 2 và số 3.

```

for i = 1:length(FM)
    eqn(i,1) = FM(i) == RHS(i);
end

%place unknowns in vector (displacements and forces and moments)
unknowns = [u2,v2,phi3,u3,v3,phi3,F1x,F1y,M1,F4x,F4y,M4];
solution = solve(eqn, unknowns);
solution = vpa(structfun(@double,solution))

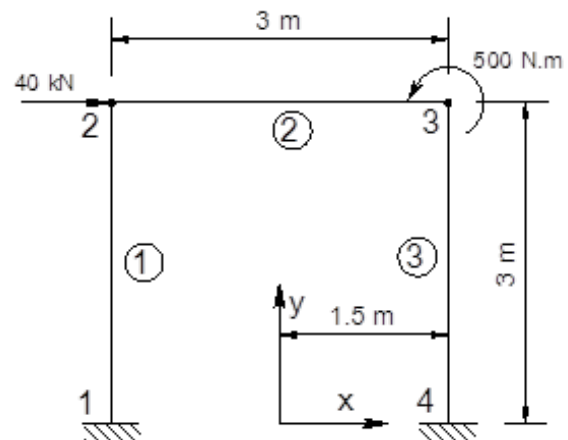
```

Thiết lập và giải hệ phương trình cân bằng cho hệ.

3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

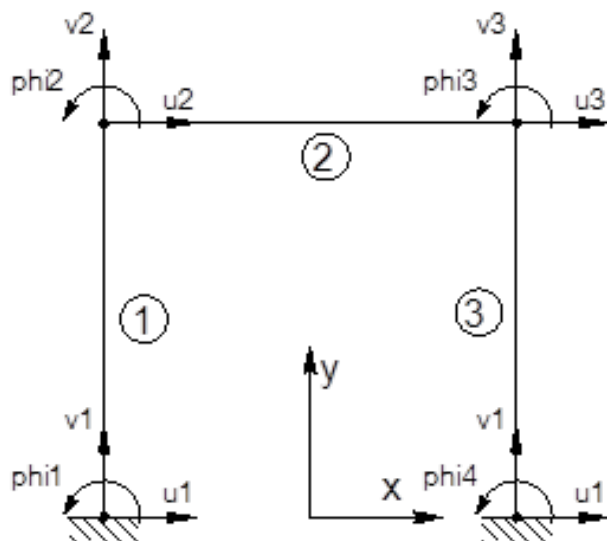
Sử dụng chương trình viết trong MATLAB tính toán hệ kết cấu trên Hình 2 bằng phương pháp PTHH.

Cho biết: E = 200Gpa, A₁ = A₂ = A₃ = 6500mm², I₁ = I₃ = 80.10⁶ mm⁴, I₂ = 40.10⁴ mm⁴.



Hình 3. Hệ thanh siêu tĩnh





Hình 4. Rời rạc hóa kết cấu

Rời rạc hóa hệ kết cấu thành 3 phần tử với các nút và bậc tự do như trên Hình 4. Sử dụng code MATLAB được tác giả viết với các hàm MATLAB của hệ thanh, thu được kết quả.

Kết quả thu được: Chuyển vị tại nút 2 và 3, lực cắt và mômen tại nút 1 và 4.

solution =

```

u2      0.0049530533159098718426482932386534
v2      0.0000341866700715021037200631870423
phi2    -0.0014302461603782398030793032717156
u3      0.0049068204391975430225802945471969
v3      -0.0000341866700715021037200631870423
phi3    -0.0013930030096933083017668453251758
F1x     -19965.753424657865252811461687088
F1y     -14814.223697650912072276696562767
M1       37576.609659004076092969626188278
F4x     -20034.246575342796859331429004669
F4y      14814.223697650912072276696562767
M4       37480.719248045170388650149106979
    
```

Từ đó, ta có thể xác định được biểu đồ lực cắt (Q) và mômen uốn (M) cho hệ thanh.

4. KẾT LUẬN

Ứng dụng MATLAB trong phương pháp PTHH cho phép áp dụng với các hệ kết cấu thanh siêu tĩnh bậc cao mà không gặp trở ngại về mặt toán học. Trên cơ sở lý thuyết của phương pháp PTHH cùng với phần mềm MATLAB, tác giả đã xây dựng được chương trình con và các hàm MATLAB cho bài toán hệ thanh siêu tĩnh, thiết lập trình tự, cũng như viết chương trình để giải một ví dụ cụ thể, cho kết quả tin cậy. Việc ứng dụng các phần mềm toán nói chung và MATLAB nói riêng vào phục vụ việc học tập, giảng dạy cho sinh viên, học viên cao học ngành kỹ thuật, xây dựng và công trình là rất cần thiết và hữu ích.

Lời cảm ơn:

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: DT24-25.134.❖

Ngày nhận bài: 12/02/2025

Ngày phản biện: 07/3/2025

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Phạm Văn Đạt, "Tính toán kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn". NXB. Xây dựng, 2017.
- [2]. Nguyễn Thời Trung, Nguyễn Xuân Hùng, "Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng MATLAB". NXB. Xây dựng, 2015.
- [3]. P.I. Kattan, "MATLAB Guide to Finite Elements". Springer, 2007.
- [4]. A.J.M. Ferreira, "MATLAB Codes for Finite Element Analysis". Springer, 2009.