

PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC NGƯỢC ROBOT SONG SONG STEWART-GOUGH

STEWART-GOUGH ROBOT DYNAMIC ANALYSIS

Nguyễn Trí Dũng

Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

TÓM TẮT

Các robot song song là các hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng [1-8]. Trong mỗi robot song song, bàn máy động được nối với giá cố định bằng một số mạch vòng. Robot song song có một số ưu điểm như khả năng chịu tải lớn, độ cứng vững cao do kết cấu hình học của chúng, có thể thực hiện các thao tác phức tạp và hoạt động với độ chính xác cao. Vì những ưu điểm đó, robot song song được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực công nghiệp cơ khí và tự động hóa. Bài toán động lực học ngược và điều khiển robot song song đang được quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây [5-7]. Các phương pháp nghiên cứu động lực học hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng thường được sử dụng là: Phương trình Lagrange dạng nhân tử [2, 6, 8], Nguyên lý công ảo [6, 7]. Trong công trình này sử dụng phương pháp tách cấu trúc để thiết lập phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của robot song song Stewart-Gough. Sau đó sử dụng phương pháp biến đổi hệ phương trình vi phân đại số về hệ phương trình vi phân thường với số phương trình bằng số bậc tự do của hệ để giải bài toán động lực học ngược [2, 8]. Các kết quả mô phỏng số thực hiện trên phần mềm MAPLE.

Từ khóa: Robot song song; Động lực học ngược.

ABSTRACT

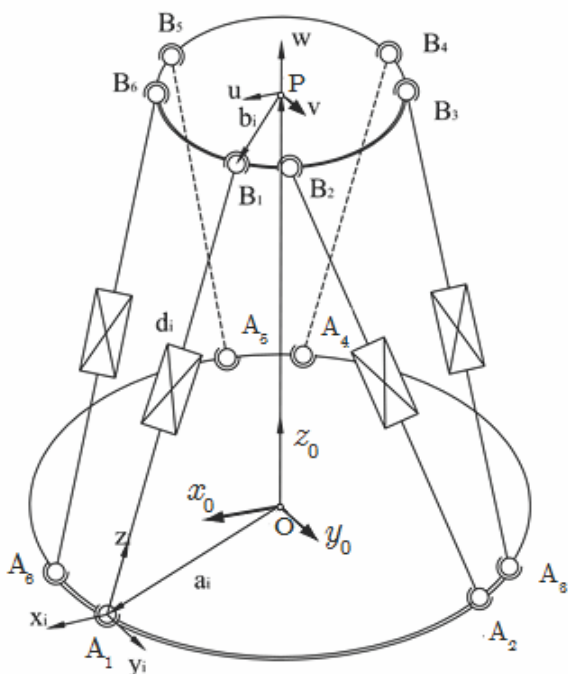
Parallel robots are multi-body systems with a circular structure [1-8]. In each parallel robot, the movable table is connected to the fixed rack by a number of loops. Parallel robots have a number of advantages such as large load capacity, high rigidity due to their geometric structure, can perform complex operations and operate with high precision. Because of those advantages, parallel robots are applied in many fields of mechanical industry and automation. The problem of inverse kinematics and parallel robot control is being studied recently [5-7]. The most commonly used methods of studying the dynamics of a multi-body system with a circular structure are: Multiplier Lagrange equation [2, 6, 8], Virtual work principle [6, 7]. In this work, the structure separation method is used to establish algebraic differential equations describing the motion of the Stewart-Gough parallel robot. Then use the method of transforming the system of algebraic differential equations into a system of ordinary differential equations with the number of equations equal to the number of degrees of freedom of the system to solve the inverse dynamics problem [2, 8]. Numerical simulation results performed on MAPLE software.

Keywords: Parallel robot; Reverse dynamics.



1. THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA ROBOT SONG SONG STEWART-GOUGH BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÁCH CẤU TRÚC

Robot song song không gian Stewart-Gough gồm bàn máy động $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ hình tròn, nối với giá cố định qua 6 chân A_1B_1 ($i=1,2,\dots,6$). Sáu chân của robot nối với bàn máy động tại các khớp cầu $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ và nối với giá cố định tại 6 khớp cầu $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ mỗi chân có 2 khâu nối với nhau bằng khớp trượt. Chọn hệ trục tọa độ cố định $Ox_0y_0z_0$ như hình 1. Chiều dài các chân là d_i . Khoảng cách từ tâm hệ quy chiếu $Ox_0y_0z_0$ đến tâm các khớp cầu A_i là a . Khoảng cách từ tâm hệ quy chiếu động Puvw đến tâm các khớp cầu B_i là b . Khối lượng các khâu dưới mỗi chân là m_1 , khối lượng các khâu trên của mỗi chân là m_2 .



Hình 1. Robot song song Stewart-Gough

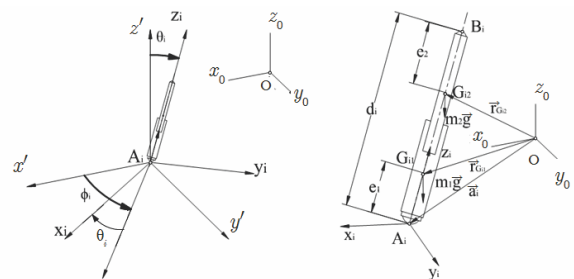
Vị trí khối tâm P của bàn máy động được

xác định bởi véc tơ $\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$. Trong hệ tọa độ cố định $Ox_0y_0z_0$: $\vec{r}_P^{(0)} = [x_P, y_P, z_P]^T$. Vị trí các khớp B_i trong hệ quy chiếu động Puvw được xác định bởi $\vec{b}_i = PB_i$, trong đó $\vec{b}_i^{(P)} = [b_{iu}, b_{iv}, b_{iw}]^T$. Hướng của bàn máy động được xác định bởi 3 góc Roll-Pitch-Yaw $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, ma trận cosin chỉ hướng của bàn máy động đối với hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ [8].

$$A_p = \begin{bmatrix} c\varphi_z c\varphi_y & -s\varphi_z c\varphi_x + c\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x & s\varphi_z s\varphi_x + c\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x \\ s\varphi_z c\varphi_y & c\varphi_z c\varphi_x + s\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x & -c\varphi_z s\varphi_x + s\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x \\ -s\varphi_y & c\varphi_y s\varphi_x & c\varphi_y c\varphi_x \end{bmatrix} \quad (1)$$

Trong đó, ta ký hiệu $c\varphi = \cos \varphi, s\varphi = \sin \varphi$.

Trên mỗi chân robot gắn vào khâu dưới hệ quy chiếu $A_ix_iy_iz_i$ ($i=1,2,\dots,6$). Trong đó, trục A_iz_i hướng dọc theo trục của chân thứ i , A_iy_i chọn sao cho vuông góc với mặt phẳng (A_iz_i' và A_iz_i), $A_iz_i' // Oz_0$. A_ix_i được chọn sao cho $A_ix_iy_iz_i$ tạo thành hệ quy chiếu thuận. Vị trí của hệ $A_ix_iy_iz_i$ đối với hệ $A_ix_i'y_i'z_i'$ được xác định bởi hai góc ϕ_i và θ_i như hình 2.



Hình 2. Các góc Euler của mỗi chân và thông số kích thước, khối lượng các chân

Ma trận cosin chỉ hướng của chân thứ i đối với hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ là [8]:

$$\begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i & s\phi_i & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i & c\phi_i & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i & 0 & c\theta_i \end{bmatrix} \quad (2)$$

Mỗi chân robot là một hệ gồm 2 vật rắn (2 khâu) nối với nhau tại khớp trượt và nối với giá cố định bởi khớp cầu A_i . Vị trí chân A_i được xác định trong hệ tọa độ cố định bởi vectơ

$$\mathbf{a}_i^{(0)} = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T.$$

Ký hiệu G_{i1} và G_{i2} (trên hình 2) lần lượt là khối tâm của khâu dưới và khâu trên của mỗi chân. Độ dài khâu dưới là $2e_1$, độ dài khâu trên là $2e_2$. Vectơ đại số xác định khối tâm của khâu trên và khâu dưới trong hệ quy chiếu $A_i x_i y_i z_i$ gắn liền với mỗi chân là:

$$\mathbf{c}_{i1}^{(i)} = [0, 0, e_1]^T, \mathbf{c}_{i2}^{(i)} = [0, 0, d_i - e_2]^T \quad (3)$$

Các vectơ $\vec{r}_{G_{i1}}, \vec{r}_{G_{i2}}$ lần lượt xác định vị trí của G_{i1} và G_{i2} trong hệ quy chiếu cố định Oxyz. Từ hình vẽ, ta có:

$$\vec{r}_{G_{i1}} = \vec{a}_i + \vec{c}_{i1}, \vec{r}_{G_{i2}} = \vec{a}_i + \vec{c}_{i2}.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{G_{i1}}^{(0)} &= \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{i1}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{ix} + c\phi_i s\theta_i e_1 \\ a_{iy} + s\phi_i s\theta_i e_1 \\ a_{iz} + c\theta_i e_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}_{G_{i2}}^{(0)} &= \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{c}_{i2}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{ix} + c\phi_i s\theta_i (d_i - e_2) \\ a_{iy} + s\phi_i s\theta_i (d_i - e_2) \\ a_{iz} + c\theta_i (d_i - e_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Vị trí của chân thứ i được xác định bởi các tọa độ suy rộng $\mathbf{q}_i = [\theta_i, \phi_i, d_i]^T$. Các phương trình liên kết hình học cho mạch vòng thứ i có dạng:

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_i B_i} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB_i} \Leftrightarrow \vec{a}_i + \vec{d}_i = \vec{r}_P + \vec{b}_i \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A} \mathbf{d}_i^{(i)} = \mathbf{r}_P^{(0)} + \mathbf{A} \mathbf{b}_i^{(i)} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i & -s\phi_i & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i & c\phi_i & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i & 0 & c\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\varphi_z c\varphi_y & -s\varphi_z c\varphi_y + c\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x & s\varphi_z s\varphi_y + c\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x \\ s\varphi_z c\varphi_y & c\varphi_z c\varphi_y + s\varphi_z s\varphi_y s\varphi_x & -c\varphi_z s\varphi_y + s\varphi_z s\varphi_y c\varphi_x \\ -s\varphi_y & c\varphi_y s\varphi_x & c\varphi_y c\varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{iu} \\ b_{iv} \\ b_{iw} \end{bmatrix} \quad (7)$$

với $i = 1, 2, \dots, 6$.

Chọn các tọa độ suy rộng dư xác định vị trí robot là:

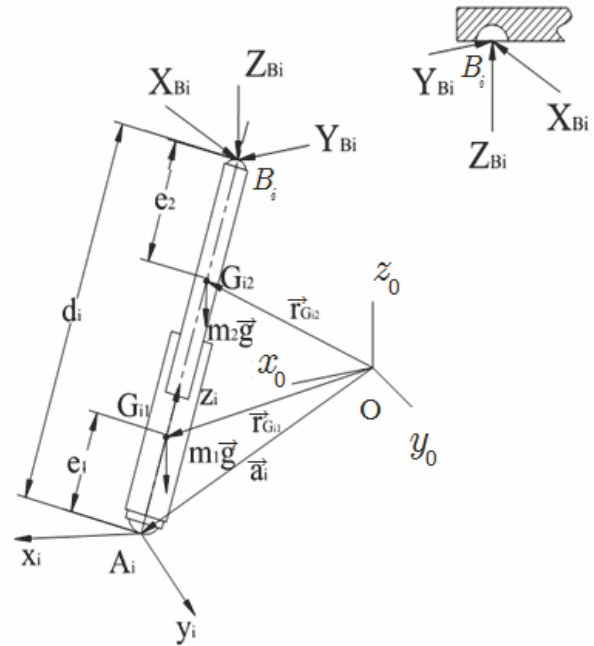
$$\mathbf{s} = [\mathbf{q}_a^T \quad \mathbf{q}_p^T \quad \mathbf{x}^T]^T \quad (8)$$

Trong đó:

$$\mathbf{q}_a = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^T;$$

$$\mathbf{q}_p = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6]^T$$

$$\mathbf{x} = [x_P, y_P, z_P, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T.$$



Hình 3. Các cấu trúc con của Robot

Sử dụng phương pháp tách cấu trúc, tách robot thành 7 cấu trúc con gồm 6 chân và

bàn máy động như hình 3. Các ngoại lực tác dụng lên cấu trúc con thứ i (ứng với mỗi chân của robot): Các phản lực liên kết tại khớp động B_i : X_{Bi} , Y_{Bi} , Z_{Bi} ($i=1\ldots6$), lực dẫn động cho khớp trượt là ($i = 1\ldots6$), khối lượng các khâu trên và dưới lần lượt là m_1 và m_2 .

Tọa độ suy rộng sử dụng tại chân thứ i là: $\mathbf{q}^{(i)} = [\theta_i, \phi_i, d_i]^T$

a) Thiết lập phương trình chuyển động của các chân

Ký hiệu vận tốc góc của khâu dưới và khâu trên thuộc mỗi chân là $\vec{\omega}_{i1}, \vec{\omega}_{i2}$. Ta có hệ thức [8]:

$$\tilde{\omega}_{i1}^{(i)} = \tilde{\omega}_{i2}^{(i)} = \mathbf{A}_i^T \dot{\mathbf{A}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_i \dot{\phi}_i & \dot{\theta}_i \\ c\theta_i \dot{\phi}_i & 0 & s\theta_i \dot{\phi}_i \\ -\dot{\theta}_i & -s\theta_i \dot{\phi}_i & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Từ đó quy ra:

$$\Rightarrow \omega_{i1}^{(i)} = \omega_{i2}^{(i)} = \begin{bmatrix} -s\theta_i \dot{\phi}_i \\ \dot{\theta}_i \\ c\theta_i \dot{\phi}_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

Từ (4), ta có các ma trận Jacobi tịnh tiến các khâu của chân thứ i :

$$\mathbf{J}_{T_{i1}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_{i1}}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}^{(i)}} = \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i \cdot e_1 & -s\phi_i s\theta_i \cdot e_1 & 0 \\ s\phi_i c\theta_i \cdot e_1 & c\phi_i s\theta_i \cdot e_1 & 0 \\ -s\theta_i \cdot e_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{T_{i2}} = \frac{\partial \mathbf{r}_{G_{i2}}^{(0)}}{\partial \mathbf{q}^{(i)}} = \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i \cdot (d_i - e_2) & -s\phi_i s\theta_i \cdot (d_i - e_2) & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i \cdot (d_i - e_2) & c\phi_i s\theta_i \cdot (d_i - e_2) & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i \cdot (d_i - e_2) & 0 & c\theta_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

Từ (10), ta có các ma trận Jacobi quay các khâu của chân thứ i :

$$\mathbf{J}_{R_{i1}}^{(i)} = \mathbf{J}_{R_{i2}}^{(i)} = \frac{\partial \omega_{i1}^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(i)}} = \frac{\partial \omega_{i2}^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(i)}} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_i & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Các ma trận của các tenxơ quán tính của các khâu đối với khối tâm của chúng trên chân thứ i có dạng:

$$\mathbf{I}_{i1}^{(i)} = \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix}; \mathbf{I}_{i2}^{(i)} = \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Biểu thức ma trận khối lượng chân thứ i [8]:

$$\mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}) = \mathbf{J}_{T_{i1}}^T m_1 \mathbf{J}_{T_{i1}} + \mathbf{J}_{T_{i2}}^T m_2 \mathbf{J}_{T_{i2}} + \mathbf{J}_{R_{i1}}^{(i)T} \mathbf{I}_{i1}^{(i)} \mathbf{J}_{R_{i1}}^{(i)} + \mathbf{J}_{R_{i2}}^{(i)T} \mathbf{I}_{i2}^{(i)} \mathbf{J}_{R_{i2}}^{(i)} \quad (14)$$

Thế các biểu thức (11), (12) và (13) vào (14), ta được:

$$\mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}) = \begin{bmatrix} m_{11}^{(i)} & m_{12}^{(i)} & m_{13}^{(i)} \\ m_{21}^{(i)} & m_{22}^{(i)} & m_{23}^{(i)} \\ m_{31}^{(i)} & m_{32}^{(i)} & m_{33}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Trong đó:

$$m_{11}^{(i)} = I_{y_1} + I_{y_2} + m_1 e_1^2 + m_2 (d_i - e_2)^2; m_{12}^{(i)} = 0; m_{13}^{(i)} = 0;$$

$$m_{21}^{(i)} = 0; m_{22}^{(i)} = (I_{x_1} + I_{x_2} + m_1 e_1^2 + m_2 (d_i - e_2)^2) s^2 \theta_i + (I_{y_1} + I_{y_2}) c^2 \theta_i; m_{23}^{(i)} = 0; \quad (16)$$

$$m_{31}^{(i)} = 0; m_{32}^{(i)} = 0; m_{33}^{(i)} = m_2;$$

Ma trận quán tính ly tâm và Coriolis của chân thứ i [9, 10]:

$$\mathbf{C}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}^{(i)}) = \frac{\partial \mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)})}{\partial \mathbf{q}^{(i)}} (\mathbf{I}_3 \otimes \dot{\mathbf{q}}^{(i)}) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)})}{\partial \mathbf{q}^{(i)}} (\dot{\mathbf{q}}^{(i)} \otimes \mathbf{I}_3) \right)^T \quad (17)$$

Thế ma trận $\mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)})$ từ (15) vào (17), thực hiện các phép tính ma trận nhờ MAPLE, ta được:

$$\mathbf{C}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}^{(i)}) = \begin{bmatrix} c_{11}^{(i)} & c_{12}^{(i)} & 0 \\ 0 & c_{22}^{(i)} & 0 \\ c_{31}^{(i)} & c_{32}^{(i)} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} c_{11}^{(i)} &= 2m_2(d_i - e_2)\dot{d}_i \\ c_{12}^{(i)} &= -s\theta_i c\theta_i \left[m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 + I_{x_i} + I_{y_i} - I_{z_i} \right] \dot{\phi}_i \\ c_{22}^{(i)} &= 2s\theta_i c\theta_i \left[m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 + I_{x_i} + I_{y_i} - I_{z_i} \right] \dot{\theta}_i + 2m_2(d_i - e_2)s^2\theta_i \dot{d}_i \\ c_{31}^{(i)} &= -m_2(d_i - e_2)\dot{\theta}_i, c_{32}^{(i)} = -m_2(d_i - e_2)s^2\theta_i \dot{\phi}_i \end{aligned} \quad (19)$$

Biểu thức thế năng của chân thứ i có dạng:

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} &= m_1 g^T r_{G_i} + m_2 g^T r_{G_{i2}} = m_1 g(a_{ix} + e_1 c\theta_i) + m_2 g[a_{ix} + (d_i - e_2)c\theta_i] \\ g^{(i)}(q^{(i)}) &= \left(\frac{\partial \Pi^{(i)}}{\partial q^{(i)}} \right)^T = \begin{bmatrix} (-m_1 e_1 - m_2 d_i + m_2 e_2) g s\theta_i \\ 0 \\ m_2 g c\theta_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Để tính công ảo của các lực không thế:

$$\sum \delta A_i^{np} = \tau_i \delta d_i - X_{B_i} \delta x_{B_i} - Y_{B_i} \delta y_{B_i} - Z_{B_i} \delta z_{B_i} \quad (21)$$

ta cần xác định vị trí các khớp B_i : $\vec{r}_{B_i} = \vec{a}_i + \vec{d}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B_i}^{(0)} &= \mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{A}_i \mathbf{d}_i^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i & -s\phi_i & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i & c\phi_i & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i & 0 & c\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ix} + c\phi_i s\theta_i d_i \\ a_{iy} + s\phi_i s\theta_i d_i \\ a_{iz} + c\theta_i d_i \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_{B_i} = a_{ix} + c\phi_i s\theta_i d_i \\ y_{B_i} = a_{iy} + s\phi_i s\theta_i d_i \\ z_{B_i} = a_{iz} + c\theta_i d_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x_{B_i} = d_i c\phi_i c\theta_i \delta\theta_i - d_i s\phi_i s\theta_i \delta\phi_i + c\phi_i s\theta_i \delta d_i \\ \delta y_{B_i} = d_i s\phi_i c\theta_i \delta\theta_i + d_i c\phi_i s\theta_i \delta\phi_i + s\phi_i s\theta_i \delta d_i \\ \delta z_{B_i} = -d_i s\theta_i \delta\theta_i + c\theta_i \delta d_i \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Thế (22) vào (21), ta được:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_i^{np} &= \left\{ -d_i c\phi_i c\theta_i X_{B_i} - d_i s\phi_i c\theta_i Y_{B_i} + d_i s\theta_i Z_{B_i} \right\} \delta\theta_i \\ &+ \left\{ d_i s\phi_i s\theta_i X_{B_i} - d_i c\phi_i s\theta_i Y_{B_i} \right\} \delta\phi_i \\ &+ \left\{ \tau_i - X_{B_i} c\phi_i s\theta_i - Y_{B_i} s\phi_i s\theta_i - Z_{B_i} c\theta_i \right\} \delta d_i \end{aligned}$$

Từ đó suy ra lực suy rộng ứng với các lực không thế ứng với chân thứ i :

$$\mathbf{f}_i^{np} = \begin{bmatrix} -d_i c\phi_i c\theta_i X_{B_i} - d_i s\phi_i c\theta_i Y_{B_i} + d_i s\theta_i Z_{B_i} \\ d_i s\phi_i s\theta_i X_{B_i} - d_i c\phi_i s\theta_i Y_{B_i} \\ \tau_i - X_{B_i} c\phi_i s\theta_i - Y_{B_i} s\phi_i s\theta_i - Z_{B_i} c\theta_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

Phương trình vi phân mô tả chuyển động của chân thứ i có dạng [8]:

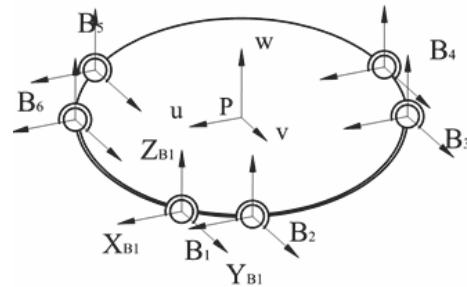
$$\mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}) \ddot{\mathbf{q}}^{(i)} + \mathbf{C}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}, \dot{\mathbf{q}}^{(i)}) \dot{\mathbf{q}}^{(i)} + \mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{q}^{(i)}) = \mathbf{f}_i^{np} \quad (24)$$

Từ đó, ta có 18 phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} &\left[I_{x_i} + I_{y_i} + m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 \right] \ddot{\theta}_i + 2m_2(d_i - e_2)\dot{\theta}_i \dot{d}_i \\ &- s\theta_i c\theta_i [m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 + I_{x_i} + I_{y_i} - I_{z_i}] \dot{\phi}_i^2 \\ &+ (-m_1 e_1 - m_2 d_i + m_2 e_2) g s\theta_i = -d_i c\phi_i c\theta_i X_{B_i} - d_i s\phi_i c\theta_i Y_{B_i} + d_i s\theta_i Z_{B_i} \\ &\left[I_{x_i} + I_{y_i} + m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 \right] s^2\theta_i + (I_{x_i} + I_{y_i}) c^2\theta_i \dot{\phi}_i \\ &+ 2s\theta_i c\theta_i [m_1 e_1^2 + m_2(d_i - e_2)^2 + I_{x_i} + I_{y_i} - I_{z_i}] \dot{\theta}_i \dot{\phi}_i + 2m_2(d_i - e_2)s^2\theta_i \dot{d}_i \dot{\phi}_i \\ &= d_i s\phi_i s\theta_i X_{B_i} - d_i c\phi_i s\theta_i Y_{B_i} \\ &m_2 \ddot{d}_i - m_2(d_i - e_2)\dot{\theta}_i^2 - m_2(d_i - e_2)s^2\theta_i \dot{\phi}_i^2 + m_2 g c\theta_i \\ &= \tau_i - X_{B_i} c\phi_i s\theta_i - Y_{B_i} s\phi_i s\theta_i - Z_{B_i} c\theta_i \end{aligned} \quad (25)$$

với $i = 1, 2, \dots, 6$.

b) Thiết lập phương trình chuyển động của bàn máy động



Hình 4. Bàn máy động

Bàn máy động (hình 4) có khối lượng m_p . Vị trí và hướng của bàn máy động được xác định bằng các tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{x} = [x_p, y_p, z_p, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T$$

Các lực tác dụng lên nó gồm các phản lực khớp động $\vec{F}_i$ ($i = 1 \dots 6$) tại vị trí các khớp nối và trọng lực $m_p \vec{g}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i^{(0)} &= [X_{B_i}, Y_{B_i}, Z_{B_i}]^T, (i = 1 \dots 6) \\ \mathbf{g} &= [0, 0, -g]^T, \quad g = 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Ma trận tenxơ quán tính khối của bàn máy động trong hệ quy chiếu gắn liền với bàn máy động:

$$\mathbf{I}_P^{(P)} = \begin{bmatrix} I_{x3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z3} \end{bmatrix}$$



Phương trình vi phân chuyển động của nó được xác định theo các phương trình chuyển động Newton-Euler [8]:

$$\begin{aligned} m_p \vec{a}_p &= \sum_{i=1}^6 \vec{F}_i + m_p \cdot \vec{g} \\ \vec{I}_p \cdot \dot{\vec{\omega}}_p + \vec{\omega}_p \times (\vec{I}_p \cdot \vec{\omega}_p) &= \vec{M}_p \end{aligned} \quad (26)$$

Vận tốc góc và gia tốc góc của bàn máy động:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_p^{(P)} &= \mathbf{A}_p^T \dot{\mathbf{A}}_p = \begin{bmatrix} 0 & s\varphi_x \dot{\varphi}_y - c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_z & c\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_y s\varphi_x \dot{\varphi}_z \\ -s\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_z & 0 & -\dot{\varphi}_x + s\varphi_y \dot{\varphi}_z \\ -c\varphi_x \dot{\varphi}_y - c\varphi_y s\varphi_x \dot{\varphi}_z & \dot{\varphi}_x - s\varphi_y \dot{\varphi}_z & 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \vec{\omega}_p^{(P)} &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x - s\varphi_y \dot{\varphi}_z \\ c\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_y s\varphi_x \dot{\varphi}_z \\ -s\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\vec{\alpha}_p^{(P)} = \frac{d\vec{\omega}_p^{(P)}}{dt} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_x - s\varphi_y \ddot{\varphi}_z - c\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z \\ c\varphi_x \ddot{\varphi}_y - s\varphi_x c\varphi_y \ddot{\varphi}_z - s\varphi_x \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z + c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_z - s\varphi_x s\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z \\ -s\varphi_x \ddot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \ddot{\varphi}_z - c\varphi_x \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z - s\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_z - c\varphi_x s\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z \end{bmatrix} \quad (28)$$

Vận tốc, gia tốc điểm P:

$$\vec{v}_p^{(0)} = \frac{d\vec{r}_p^{(0)}}{dt} = [\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p]^T, \quad \vec{a}_p^{(0)} = \frac{d\vec{v}_p^{(0)}}{dt} = [\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p]^T \quad (29)$$

Moment của hệ lực tác dụng lên bàn máy động đối với tâm P:

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^6 \vec{b}_i \times \vec{F}_i \quad (30)$$

Trong hệ quy chiếu Puvw gắn liền với bàn máy động, ta có:

$$\vec{M}_p^{(P)} = \sum_{i=1}^6 (\vec{b}_i^{(P)} \cdot \vec{F}_i^{(P)}) \quad (31)$$

Trong đó:

$$\vec{b}_i^{(P)} = \begin{bmatrix} b_{iu} \\ b_{iv} \\ b_{iw} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b}_i^{(P)} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{iw} & b_{iv} \\ b_{iw} & 0 & -b_{iu} \\ -b_{iv} & b_{iu} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_i^{(P)} &= \mathbf{A}_p^T \vec{F}_i^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} c\varphi_x c\varphi_y & -s\varphi_x c\varphi_x + c\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z & s\varphi_x s\varphi_x + c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z \\ s\varphi_x c\varphi_y & c\varphi_x c\varphi_x + s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z & -c\varphi_x s\varphi_x + s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z \\ -s\varphi_y & c\varphi_y s\varphi_x & c\varphi_y c\varphi_x \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{B_i} \\ Y_{B_i} \\ Z_{B_i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trong hệ phương trình (26), chiếu phương trình thứ nhất lên hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ và chiếu phương trình thứ hai lên hệ quy chiếu động Puvw, ta được:

$$\begin{aligned} m_p \cdot \vec{a}_p^{(0)} &= \sum_{i=1}^6 \vec{F}_i^{(0)} - m_p \vec{g} \\ \vec{I}_p^{(P)} \vec{\alpha}_p^{(P)} + \vec{\omega}_p^{(P)} (\vec{I}_p^{(P)} \vec{\omega}_p^{(P)}) &= \vec{M}_p^{(P)} \end{aligned} \quad (32)$$

Thế (27), (28), (29) và (31) vào (32), ta được hệ 6 phương trình vi phân của bàn máy động:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{x}_p &= X_{B_1} + X_{B_2} + X_{B_3} + X_{B_4} + X_{B_5} + X_{B_6} \\ m_p \ddot{y}_p &= Y_{B_1} + Y_{B_2} + Y_{B_3} + Y_{B_4} + Y_{B_5} + Y_{B_6} \\ m_p \ddot{z}_p &= Z_{B_1} + Z_{B_2} + Z_{B_3} + Z_{B_4} + Z_{B_5} + Z_{B_6} - m_p g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x3} (\ddot{\varphi}_x - s\varphi_y \ddot{\varphi}_z - c\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z) + (I_{y3} - I_{z3}) (s\varphi_x \dot{\varphi}_y - c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_z) (c\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_y s\varphi_x \dot{\varphi}_z) \\ = \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} (-s\varphi_x c\varphi_x + c\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z) - b_{iu} (-s\varphi_x s\varphi_x - c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z)] X_{B_i} \\ + \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} (c\varphi_x c\varphi_x + s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z) - b_{iu} (c\varphi_x s\varphi_x - s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z)] Y_{B_i} \\ + \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} c\varphi_x s\varphi_x + b_{iu} c\varphi_y c\varphi_z] Z_{B_i} \\ I_{y3} (c\varphi_x \ddot{\varphi}_y + s\varphi_x c\varphi_y \ddot{\varphi}_z - s\varphi_x \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_z - s\varphi_x s\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z) \\ + (I_{x3} - I_{z3}) (\dot{\varphi}_x - s\varphi_y \dot{\varphi}_z) (-s\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_z) \\ = \sum_{i=1}^6 [b_{iw} c\varphi_x c\varphi_y - b_{iu} (s\varphi_x s\varphi_x + c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z)] X_{B_i} \\ + \sum_{i=1}^6 [b_{iw} s\varphi_x c\varphi_x - b_{iu} (-c\varphi_x s\varphi_x + s\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z)] Y_{B_i} + \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} s\varphi_y - b_{iu} c\varphi_y c\varphi_z] Z_{B_i} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} I_{z3} (-s\varphi_x \ddot{\varphi}_y + c\varphi_x c\varphi_y \ddot{\varphi}_z - c\varphi_x \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y - s\varphi_x c\varphi_y \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_z - c\varphi_x s\varphi_y \dot{\varphi}_y \dot{\varphi}_z) \\ + (I_{y3} - I_{x3}) (\dot{\varphi}_x - s\varphi_y \dot{\varphi}_z) (c\varphi_x \dot{\varphi}_y + c\varphi_y s\varphi_x \dot{\varphi}_z) \\ = \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} c\varphi_x c\varphi_y - b_{iu} (s\varphi_x c\varphi_x - c\varphi_x s\varphi_y c\varphi_z)] X_{B_i} \\ + \sum_{i=1}^6 [-b_{iw} s\varphi_x c\varphi_y + b_{iu} (c\varphi_x c\varphi_x + s\varphi_x s\varphi_y s\varphi_z)] Y_{B_i} + \sum_{i=1}^6 [b_{iw} s\varphi_y + b_{iu} c\varphi_y s\varphi_z] Z_{B_i} \end{aligned}$$

với $i = 1, 2, \dots, 6$.

Hệ 18 phương trình vi phân chuyển động của các chân (25) và 6 phương trình vi phân chuyển động của bàn máy động (33), kết hợp với 18 phương trình liên kết (7), chúng ta thu được hệ 42 phương trình vi phân - đại số mô tả chuyển động của Robot song song Stewart-Gough.

Các phương trình (25) và (33) có thể viết gọn lại dưới dạng:

$$M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) = \tau - J_s^T(s)\lambda \quad (34)$$

$$\lambda = [X_{B1}, Y_{B1}, Z_{B1}, \dots, X_{B6}, Y_{B6}, Z_{B6}]^T \quad (35)$$

Các phương trình liên kết (7) có dạng:

$$f(s) = 0$$

Trong đó:

$$s = [\theta_1, \phi_1, d_1, \theta_2, \phi_2, d_2, \theta_3, \phi_3, d_3, \theta_4, \phi_4, d_4, \theta_5, \phi_5, d_5, \theta_6, \phi_6, d_6, x_p, y_p, z_p, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z]^T \quad (36)$$

Các ẩn của bài toán là 18 thành phần phản lực liên kết (35) và 24 tọa độ suy rộng dư (36). Như thế, ta có 42 phương trình và 42 ẩn.

2. GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC NGƯỢC DỰA TRÊN CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THU GỌN

Các robot song song là các hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng. Như đã biết, phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của hệ nhiều vật có cấu trúc mạch vòng có dạng [8]:

$$M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) = \tau - J_s^T(s)\lambda \quad (37)$$

$$f(s) = 0 \quad (38)$$

Gọi $q_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ là véc tơ các tọa độ khớp chủ động, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ là véc tơ tọa độ các khớp suy rộng dư (bao gồm các tọa độ khớp bị động và có thể cả tọa độ thao tác). Ký hiệu:

$$s = [q_a^T, z^T]^T, \quad s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad n_s = n_a + n_z \quad (39)$$

Trong các phương trình (37) và (38), ta có:

$$M(s) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}, f(s) \in \mathbb{R}^r, J_s^T(s) \in \mathbb{R}^{n_s \times r}, \lambda \in \mathbb{R}^r$$

$$J_s = \frac{\partial f}{\partial s}, g(s) \in \mathbb{R}^{n_s}, v(s, \dot{s}) \in \mathbb{R}^{n_s}, \tau \in \mathbb{R}^{n_s}$$

Bài toán động lực học ngược được phát biểu dưới dạng: cho biết quy luật chuyển động

của khâu thao tác $x = x(t)$, $x \in \mathbb{R}^m$ và phương trình liên kết $f(x, q) = 0$, $q \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^r$. Xác định mô men (hay lực) của khâu dẫn động $\tau_a \in \mathbb{R}^{n_a}$ cần thiết để tạo ra chuyển động mong muốn của khâu thao tác.

Ý tưởng của phương pháp giải là khử các tọa độ suy rộng dư z và các nhân tử Lagrange λ , biến đổi hệ phương trình vi phân đại số (1) và (2) về hệ phương trình vi phân thường với các tọa độ là các thành phần của véc tơ q_a , số lượng phương trình bằng số bậc tự do của hệ [11].

Xét các phương trình liên kết (38):

$$f(s) = f(q_a, z) = 0, f \in \mathbb{R}^r, z \in \mathbb{R}^{n_z}, q_a \in \mathbb{R}^{n_a} \quad (40)$$

Giả sử số lượng các tọa độ dư bằng số các phương trình liên kết bổ sung $r = n_z$. Từ phương trình (40), ta suy ra:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial s} \delta s = J_s(s) \delta s = 0 \quad (41)$$

hay:

$$J_s(s) \delta s = J_a(s) \delta q_a + J_z(s) \delta z = 0 \quad (42)$$

Viết lại phương trình (37), ta có:

$$-J_s^T(s)\lambda = M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) - \tau \quad (43)$$

Chuyển vị hai vế của phương trình (43) và nhân với δs , ta được:

$$-\lambda^T J_s \delta s = [M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) - \tau]^T \delta s \quad (44)$$

Chú ý đến công thức (42), từ (44) ta suy ra:

$$[M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) - \tau]^T \delta s = 0^T \quad (45)$$



Mặt khác, từ phương trình (42), ta có:

$$\delta z = -J_z^{-1}(s) J_a(s) \delta q_a \quad (46)$$

Suy ra:

$$\delta s = \begin{bmatrix} \delta q_a \\ \delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{n_a} \\ -J_z^{-1}(s) J_a(s) \end{bmatrix} \delta q_a \quad (47)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$R(s) = \begin{bmatrix} E_{n_a} \\ -J_z^{-1}(s) J_a(s) \end{bmatrix} \quad (48)$$

thì phương trình (47) có dạng:

$$\delta s = R(s) \delta q_a \quad (49)$$

Từ (49), ta suy ra:

$$\dot{s} = R(s) \dot{q}_a \quad (50)$$

Thế biểu thức (49) vào phương trình (45), ta được:

$$[M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) - \tau]^T R(s) \delta q_a = 0^T \quad (51)$$

Do $\delta q = [\delta q_1^a, \delta q_2^a, \dots, \delta q_{n_a}^a]^T$ là các biến phân độc lập, nên từ phương trình (51), ta suy ra:

$$R^T(s) [M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s) - \tau] = 0 \quad (52)$$

Phương trình (52) có thể viết lại dưới dạng:

$$R^T(s) \tau = R^T(s) [M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s)] \quad (53)$$

Từ (48), ta có:

$$R^T(s) \tau = [E_{n_a}, -(J_z^{-1}(s) J_a(s))^T]^T \begin{bmatrix} \tau_a \\ \tau_z \end{bmatrix} = \tau_a - (J_z^{-1}(s) J_a(s))^T \tau_z \quad (54)$$

Thế (54) vào phương trình (53), ta được:

$$\tau_a = R^T(s) [M(s)\ddot{s} + v(s, \dot{s}) + g(s)] + (J_z^{-1}(s) J_a(s))^T \tau_z \quad (55)$$

Các bước giải bài toán động lực học ngược dựa trên các phương trình vi phân thu gọn về các tọa độ tối thiểu:

Bước 1: Giải bài toán động lực học ngược. Cho biết $x(t)$ và $f(x, q) = 0$, tính $s(t), \dot{s}(t), \ddot{s}(t)$.

Bước 2: Tính các ma trận $J_z(s), J_a(s), J_z^{-1}(s), R(s), M(s), v(s, \dot{s}), g(s)$.

Bước 3: Tính các mô men (hay lực) của các khâu dẫn động theo công thức (55).

3. MÔ PHỎNG SỐ BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC NGƯỢC

Cho biết vị trí tọa độ các chân A_i trong hệ quy chiếu cố định:

$$a_1 = [-2.120, 1.374, 0]^T; a_2 = [-2.380, 1.224, 0]^T; a_3 = [-2.380, -1.224, 0]^T; a_4 = [-2.120, -1.374, 0]^T; a_5 = [0, -0.15, 0]^T; a_6 = [-2.380, -1.224, 0]^T$$

Vị trí tọa độ các chân B_i trong hệ quy chiếu động Puvw gắn liền với bàn máy động:

$$b_1 = [0.170, 0.595, -0.4]^T; b_2 = [-0.6, 0.15, -0.4]^T; b_3 = [-0.6, -0.15, -0.4]^T; b_4 = [0.170, -0.595, -0.4]^T; b_5 = [0.43, -0.445, -0.4]^T; b_6 = [0.43, 0.445, -0.4]^T$$

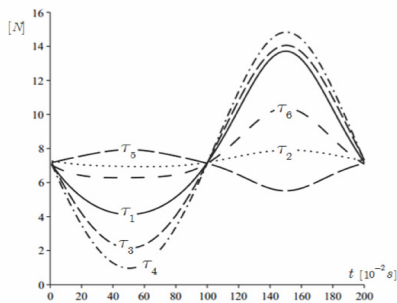
Khối lượng và kích thước các khâu của mỗi chân: $m_p = 1,5$ (kg), $m_1 = 0,1$ (kg), $m_2 = 0,1$ (kg), $e_1 = 0,5$ (m), $e_2 = 0,5$ (m).

Ma trận tenxơ quán tính khối:

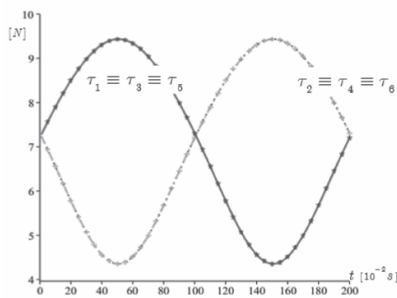
$$I_p^{(p)} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} (kg.m^2); I_{11}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0.00625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (kg.m^2); I_{12}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0.00625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (kg.m^2); g = 9.807 (m/s^2)$$

Trường hợp 1	Trường hợp 2
Bàn máy chuyển động tịnh tiến dọc theo trục z_0	Bàn máy chuyển động quay quanh trục z_0
$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 + 0.2 \sin \omega t \\ 0.2 \sin \omega t \\ 1 + 0.2 \sin \omega t \end{bmatrix} (m),$ $\omega = 3 (rad / s),$ $0 \leq \omega t \leq 2\pi; \phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$	$\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} m;$ $\phi_x = \phi_y = 0; \phi_z = 0.35 \sin \omega t;$ $\omega = 3 rad / s; 0 \leq \omega t \leq 2\pi$

Theo thuật toán trình bày trong phần 3, ta xác định các lực phát động nhờ phần mềm MAPLE. Các kết quả tính được trình bày trên các hình 5 và 6. Trên hình 5 là các lực phát động ứng với trường hợp 1, còn trên hình 6 là các lực phát động ứng với trường hợp 2.



Hình 5. Các lực phát động ứng với trường hợp 1



Hình 6. Các lực phát động ứng với trường hợp 2

Chú ý rằng, các kết quả mô phỏng trên các hình 5 và 6 trùng với các kết quả trong tài liệu [7].

4. KẾT LUẬN

Robot song song ngày càng được sử

dụng nhiều trong kỹ thuật cơ khí, trong y sinh học. Vì vậy, việc nghiên cứu động lực học và điều khiển robot song song là bài toán thời sự hiện nay. Trong báo cáo này đã sử dụng phương pháp tách cấu trúc và phương trình Lagrange dạng ma trận để thiết lập phương trình chuyển động của robot song song Stewart-Gough, sau đó đã tiến hành giải bài toán động lực học ngược robot song song Stewart-Gough. Các kết quả mô phỏng phù hợp với các kết quả mô phỏng trong tài liệu [7]. Nhờ phương pháp tách cấu trúc, việc thiết lập phương trình chuyển động của một cơ cấu không gian phức tạp trở nên rõ ràng và khả thi. Phương pháp tính toán cho mô hình robot song song Stewart-Gough có thể áp dụng cho các mô hình robot song song khác. ❖

Ngày nhận bài: 15/6/2022

Ngày phản biện: 28/6/2022

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Schiehlen W., Eberhard P.; *Technische Dynamik* (2. Auflage). B.G. Teubner, Stuttgart 2004.
- [2]. Jalon J.G., Bayo E.; *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems – The Real-Time Challenge*, Springer-Verlag, New York 1994.
- [3]. Shabana A. A.; *Dynamics of Multibody Systems* (3.Edition), Cambridge University Press, New York 2005.
- [4]. Wittenburg J.; *Dynamics of Multibody Systems* (2. Edition), Springer-Verlag, Berlin 2008.
- [5]. Merlet J. P.; *Parallel Robot*. Springer-Verlag, Berlin 2006.
- [6]. Tsai L.-W.; *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulator*. John Wiley & Sons, New York 1999.
- [7]. Tsai L.-W.; *Solving the inverse dynamics of a Stewart-Gough manipulator by the principle of virtual work*. J. Mech. Des., Vol. 122, pp. 3–9. March, 2000.
- [8]. Nguyen Van Khang; *Động lực học hệ nhiều vật*. NXB. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2007.