

NGHIÊN CỨU MÔ PHỎNG ỨNG XỬ ĐỘNG HỌC DẦM BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

RESEARCH ON SIMULATION OF DYNAMIC BEHAVIOR OF HIGH-LEVEL SLIDING DEFORMED BEAMS SUBJECTED TO MOVABLE LOADS

Nguyễn Văn Tài, Hoàng Xuân Khoa

Khoa Cơ khí, Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu mô phỏng động học của dầm dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), trong đó xây dựng công thức PTHH với ba chuyển vị nút cho dầm chịu tải trọng di động. Kết quả mô phỏng đưa ra được ứng xử động học của dầm chịu tải trọng điều hòa di động, trong đó có so sánh với ứng xử động học của dầm Bernoulli. Xây dựng công thức PTHH bằng cách tính trực tiếp hàm năng lượng và động năng sử dụng lý thuyết biến dạng bậc cao với cách lựa chọn hàm dạng Kosmatka. Thuật toán số sử dụng trong phần tính dựa trên phương pháp gia tốc trung bình trong họ các phương pháp Newmark.

Từ khóa: Dầm biến dạng trượt bậc cao; Dầm chịu tải trọng động; Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM).

ABSTRACT

The paper studies the dynamical simulation of beams based on the theory of high-order shear strain combined with the finite element method, in which, the formula of extended finite element method is developed with three nodal displacements for beams subjected to movable loads. The simulation results give the kinematic behavior of the beam subjected to movable harmonic loads, including comparison with the kinematic behavior of Bernoulli beam. Construct the finite element formula by directly calculating the energy and kinetic energy functions using high-order strain theory with the choice of a Kosmatka form function. The numerical algorithm used in the calculation is based on the average acceleration method in the Newmark family of methods.

Keywords: High-order sliding deformed beams; Dynamic load-bearing beams; Finite element method (FEM).

1. GIỚI THIỆU

Trong thực tế, các kết cấu dầm thường chịu các tải trọng động như kết cấu dầm cầu trục, các chi tiết dạng trục đỡ, đường ray của tàu, các cầu đường bộ dưới tác động của các phương tiện giao thông.... Rất nhiều các nghiên cứu về bài toán này với mô hình dầm Bernulli hay Timoshenko đã được đưa ra [7, 8, 9]. Vì vậy, nghiên cứu ứng xử động học của kết cấu dầm với biến dạng trượt bậc cao trở nên cần thiết và gần với kết cấu thực hơn, đây có thể xem là sự khái quát hóa của lý thuyết dầm Timoshenko. Dầm Timoshenko có tính đến biến dạng trượt, tuy nhiên chỉ dừng lại ở bậc nhất và bỏ qua thành phần bậc cao để bài toán trở nên đơn giản hơn. Để mô phỏng cho ứng xử động học của dầm sẽ sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với lý thuyết biến dạng trượt bậc cao. PTHH là một trong những phương pháp số được sử dụng phổ biến và có độ tin cậy cao [1, 3, 4], song các kết quả tính toán phụ thuộc vào việc xây dựng công thức PTHH và lựa chọn các hàm dạng phù hợp. Bài báo sử dụng phương pháp PTHH với ba chuyển vị nút cho dầm dưới tác dụng của tải trọng di động điều hòa. Dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao, các ma trận độ cứng, ma trận khối lượng được xây dựng trực tiếp từ phép hàm năng lượng, biểu thức động năng qua chuyển vị nút và các hàm dạng được lựa chọn.

2. PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO DẦM CÓ BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO

Lý thuyết dầm khi xét đến yếu tố biến dạng trượt bậc cao thì biến dạng dọc trục và chuyển vị ngang được cho bởi [5]:

$$\tilde{u}(x, z, t) = u(x, t) - z\theta(x, t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\frac{\partial\omega(x, t)}{\partial x} - \theta(x, t)\right) \quad (1)$$

$$\tilde{\omega}(x, z, t) = \omega(x, t) \quad (2)$$

Với $u(x, t)$, $\omega(x, t)$ tương ứng là chuyển vị dọc trục và chuyển vị theo phương ngang của điểm nằm trên trục giữa của dầm, z là tọa độ theo chiều cao, x là tọa độ theo trục của dầm, $\theta(x, t)$ là góc quay của thiết diện ngang.

Từ đó nhận được các thành phần biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = u_{,x} - z\theta_{,x} - \frac{4}{3h^2}z^3(\omega_{,xx} - \theta_{,x}) \quad (3)$$

$$\psi = \left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right)\left(\theta - \frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right)(\theta - \omega_{,x}) \quad (4)$$

Xét phần tử dầm mặt cắt hình chữ nhật $b \times h$ với mỗi nút có 3 chuyển vị nút u , ω , θ . Do có biến dạng trượt nên u , ω , θ độc lập với nhau và không phụ thuộc vào z .

Các thành phần ứng suất theo định luật Húc được xác định bởi:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau = \kappa G\left(1 - \frac{4}{h^2}z^2\right)(\theta - \omega_{,x}) \quad (5)$$

Hàm năng lượng biến dạng U :

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma \varepsilon + \tau \psi] dV = \frac{1}{2} \int_V [(\varepsilon_x E \varepsilon_x + \tau \psi)] dV = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \tau \psi dV \quad (6)$$

Thay (3), (4) vào biểu thức năng lượng biến dạng (6), do $u_{,x}$, $\theta_{,x}$ không phụ thuộc vào

$$z \text{ nên } \int_{-h/2}^{h/2} z u_{,x} \theta_{,x} dz = 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^3 (\omega_{,xx} - \theta_{,x}) dz = 0$$

(7), từ (6) nhận được biểu thức năng lượng cho phần tử dầm có độ dài L , chiều rộng b , chiều cao h .

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EA u_{,x}^2 + EI \theta_{,x}^2) dx + \frac{EI}{42} \int_0^L (\omega_{,xx} - \theta_{,x})^2 dx + \frac{EI}{5} \int_0^L \theta_{,x} (\omega_{,xx} - \theta_{,x}) dx + \frac{4\kappa}{15} \int_0^L GA (\theta - \omega_{,x})^2 dx \quad (8)$$

Trong đó:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} bz^2 dz = \frac{bh^3}{12}, A = b.h, dV = dAdx = b dz dx \quad (9),$$

κ : hệ số điều chỉnh cho độ vênh của thiết diện ngang, với mặt cắt hình chữ nhật theo tài liệu [2] thì $\kappa = \frac{5}{6}$.

Nội suy các chuyển vị của dầm qua các chuyển vị nút d:

$$\begin{pmatrix} u \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_\omega \\ \mathbf{N}_\theta \end{pmatrix} \mathbf{d} \Leftrightarrow u = \mathbf{N}_u \mathbf{d}, \quad \omega = \mathbf{N}_\omega \mathbf{d}, \quad \theta = \mathbf{N}_\theta \mathbf{d} \quad (10)$$

Trong đó:

$$\mathbf{d} = (u_1 \quad \omega_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \omega_2 \quad \theta_2)^T,$$

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_{u_1} & N_{u_2} & N_{u_3} & N_{u_4} & N_{u_5} & N_{u_6} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_\omega = \begin{bmatrix} N_{\omega_1} & N_{\omega_2} & N_{\omega_3} & N_{\omega_4} & N_{\omega_5} & N_{\omega_6} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} N_{\theta_1} & N_{\theta_2} & N_{\theta_3} & N_{\theta_4} & N_{\theta_5} & N_{\theta_6} \end{bmatrix}$$

Đặt (10) vào biểu thức năng lượng (8) thu được:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T E A \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} \mathbf{d} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{d}^T E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} \mathbf{d} dx \\ & + \frac{4\kappa}{15} \int_0^L \mathbf{d}^T G A (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) \mathbf{d} dx \cdot \\ & + \frac{EI}{42} \int_0^L \mathbf{d}^T (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x})^T (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x}) \mathbf{d} dx \\ & + \frac{EI}{5} \int_0^L \mathbf{d}^T N_{\theta,x} (N_{\omega,xx} - N_{\theta,x}) \mathbf{d} dx \end{aligned} \quad (11)$$

Động năng của dầm: Thay (1), (2) vào biểu thức động năng, tương tự như hàm năng lượng biến dạng, đặt trường chuyển vị nội suy

qua các chuyển vị nút nhận được biểu thức động năng có dạng:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{d}} dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{N}_\omega^T \mathbf{N}_\omega \dot{\mathbf{d}} dx \\ & + \frac{1}{5} \rho I \int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{N}_\theta^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) \dot{\mathbf{d}} dx + \\ & + \frac{1}{42} \rho I \int_0^L \dot{\mathbf{d}}^T (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x})^T (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x}) \dot{\mathbf{d}} dx \end{aligned} \quad (12)$$

Giả sử dầm chịu tác động của tải trọng điều hòa $F = P \cos \Omega t$ chuyển động với vận tốc v trên dầm. Sử dụng nguyên lý biến phân Hamilton thu được phương trình phần tử hữu hạn:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = P \cos \Omega t \mathbf{N}_\omega^T \quad (13)$$

Trong đó, $\mathbf{K}$ là ma trận độ cứng phần tử nhận được từ biểu thức năng lượng biến dạng:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (14)$$

Với:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b = & \int_0^L E A \mathbf{N}_{u,x}^T \mathbf{N}_{u,x} dx + \int_0^L E I \mathbf{N}_{\theta,x}^T \mathbf{N}_{\theta,x} dx \\ & + \frac{EI}{21} \int_0^L (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x})^T (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x}) dx \\ & + \frac{2EI}{5} \int_0^L \mathbf{N}_{\theta,x} (\mathbf{N}_{\omega,xx} - \mathbf{N}_{\theta,x}) dx \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{8}{15} \kappa \int_0^L G A (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) dx \quad (16)$$

$\mathbf{K}_b$, $\mathbf{K}_s$ có thể gọi là ma trận độ cứng uốn, độ cứng trượt tương ứng của phần tử.

$\mathbf{M}$ là ma trận khối lượng nhận được từ biểu thức động năng, ρ là mật độ khối lượng.

$$\mathbf{M} = \rho A \int_0^L \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u dx + \rho A \int_0^L \mathbf{N}_\omega^T \mathbf{N}_\omega dx + \frac{2}{5} \rho I \int_0^L \mathbf{N}_\theta^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) dx + \frac{1}{21} \rho I \int_0^L (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta)^T (\mathbf{N}_{\omega,x} - \mathbf{N}_\theta) dx \quad (17)$$

Sử dụng hàm dạng Kosmatka [6] chứa tham số biến dạng trượt ϕ cho chuyển vị ngang và góc xoay θ có dạng như sau:

$$N_{u_1} = \frac{L-x}{L}, \quad N_{u_4} = \frac{x}{L}, \quad N_{u_2} = N_{u_3} = N_{u_5} = N_{u_6} = 0, \\ \mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$N_{\omega_1} = N_{\omega_4} = 0$$

$$N_{\omega_2} = \frac{1}{1+\phi} \left(2 \frac{x^3}{L^3} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \phi \frac{x}{L} + 1 + \phi \right),$$

$$N_{\omega_3} = \frac{L}{1+\phi} \left(\frac{x^3}{L^2} - \left(2 + \frac{\phi}{2} \right) \frac{x^2}{L^2} + \left(1 + \frac{\phi}{2} \right) \frac{x}{L} \right),$$

$$N_{\omega_5} = -\frac{1}{1+\phi} \left(2 \frac{x^3}{L^3} - 3 \frac{x^2}{L^2} - \phi \frac{x}{L} \right),$$

$$N_{\omega_6} = \frac{L}{1+\phi} \left(\frac{x^3}{L^3} - \left(1 - \frac{\phi}{2} \right) \frac{x^2}{L^2} - \frac{\phi}{2} \frac{x}{L} \right),$$

$$\mathbf{N}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & N_{\omega_2} & N_{\omega_3} & 0 & N_{\omega_5} & N_{\omega_6} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$N_{\theta_1} = N_{\theta_4} = 0$$

$$N_{\theta_2} = \frac{6}{L(1+\phi)} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right),$$

$$N_{\theta_3} = \frac{L}{1+\phi} \left(3 \frac{x^2}{L^2} - (4+\phi) \frac{x}{L} + 1 + \phi \right),$$

$$N_{\theta_5} = -\frac{6}{L(1+\phi)} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right),$$

$$N_{\theta_6} = \frac{L}{1+\phi} \left(3 \frac{x^2}{L^2} - (2-\phi) \frac{x}{L} \right), \quad \phi = \frac{12EI}{\kappa AGL^2},$$

$$\mathbf{N}_\theta = \begin{bmatrix} 0 & N_{\theta_2} & N_{\theta_3} & 0 & N_{\theta_5} & N_{\theta_6} \end{bmatrix} \quad (20)$$

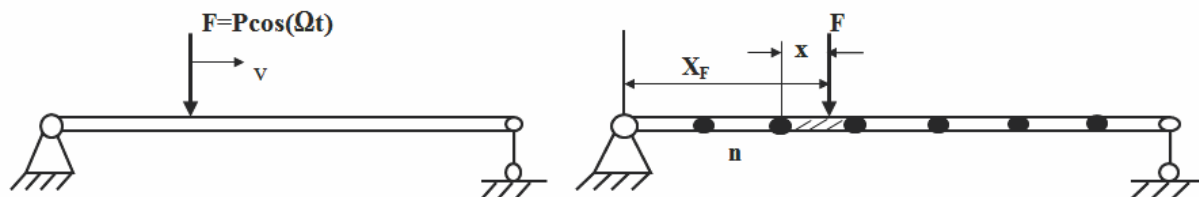
Đặt các hàm dạng trong (20), (21), (22) vào (16), (19) thu được các ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của phần tử dầm.

3. MÔ PHỎNG SỐ VÀ SO SÁNH

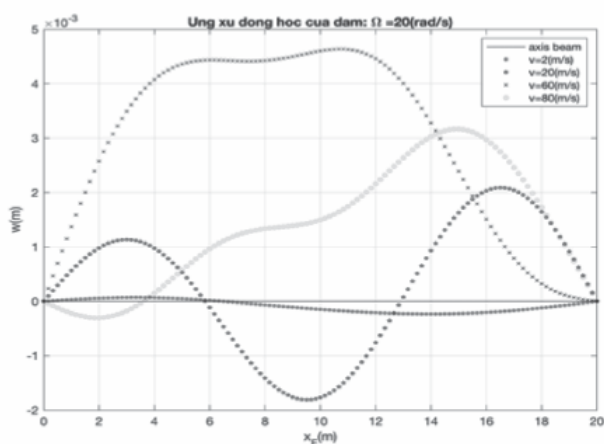
Mục này sử dụng các công thức phần tử bao gồm ma trận độ cứng, ma trận khối lượng, véc tơ lực nút đã xây dựng được ở trên để phân tích ứng xử động học cho mô hình dầm có biến dạng trượt bậc cao chịu tải trọng di động trong đó có so sánh với dầm Bernoulli. Thuật toán số sử dụng trong phần tính này dựa trên phương pháp gia tốc trung bình trong họ các phương pháp Newmark [3] với bước thời gian đảm bảo thuật toán ổn định thỏa mãn $\Delta t \leq 2/\omega_{\max}$, $\omega_{\max}$ là tần số riêng lớn nhất. Chương trình tính được viết trên phần mềm Matlab. Dầm Bernoulli chịu tải trọng di động với 3 chuyển vị nút thì ma trận độ cứng, ma trận khối lượng đã được xác định [3].

Mô hình dầm có biến dạng trượt bậc cao chịu tải trọng điều hòa di động với vận tốc v (hình 1): $\mathbf{F} = \mathbf{P} \cos(\Omega t)$. Dầm thép có chiều dài $L = 20\text{m}$, mặt cắt ngang hình chữ nhật $h = 0,1\text{m}$, $b = 0,3\text{m}$, $E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$, $G = 8.10^{10} \text{ N/m}^2$, $\kappa = 5/6$, $P = 1000\text{N}$.

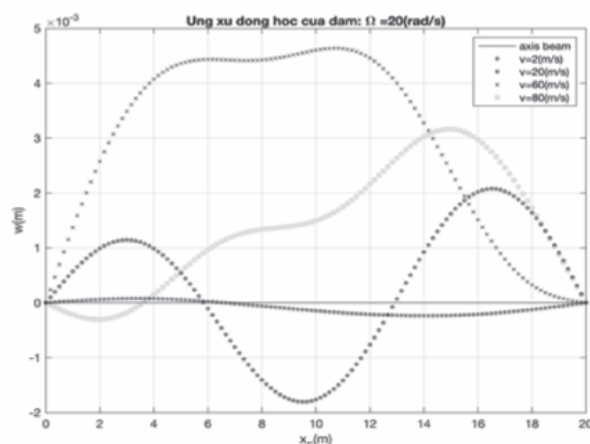
Các kết quả tính toán mô hình dầm và so sánh với dầm Bernoulli được thể hiện trên các hình 2, 3 cho thấy ảnh hưởng của vận tốc tải trọng, tần số lực kích động đến ứng xử động học của dầm. Kết quả mô phỏng cho các trường hợp thay đổi tần số lực kích động và vận tốc tải trọng, khi so sánh với dầm Bernoulli cho kết quả không khác nhau nhiều. Điều đó cho thấy kết quả tính toán dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao với hàm dạng lựa chọn Kosmatka là phù hợp và đáng tin cậy. 



Hình 1. Mô hình dầm chịu tải trọng điều hòa di động

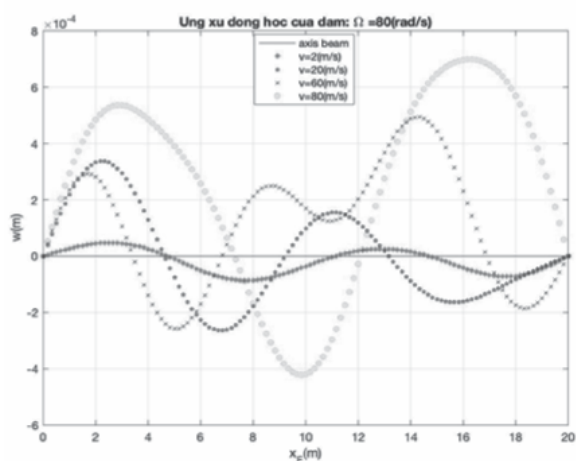


a. Ứng xử động học dầm có biến dạng trượt bậc cao
 $\Omega = 20 \text{ (rad/s)}$

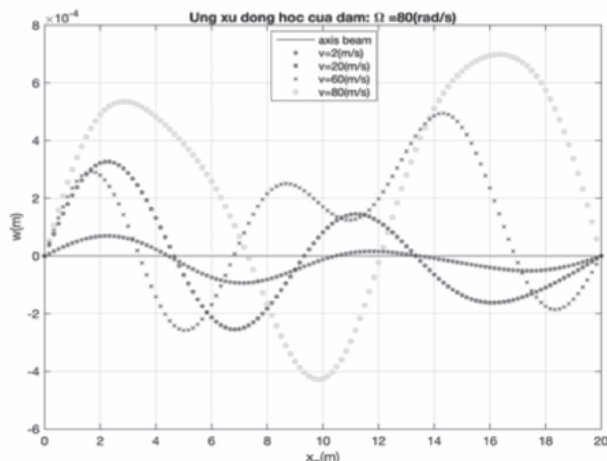


b. Ứng xử động học dầm Bernoulli
 $\Omega = 20 \text{ (rad/s)}$

Hình 2. So sánh ứng xử động học dầm có biến dạng trượt bậc cao (a) và dầm Bernoulli (b) trong trường hợp $\Omega = 20 \text{ (rad/s)}$



a. Ứng xử động học dầm có biến dạng trượt bậc cao
 $\Omega = 80 \text{ (rad/s)}$



b. Ứng xử động học dầm Bernoulli
 $\Omega = 80 \text{ (rad/s)}$

Hình 3. So sánh ứng xử động học dầm có biến dạng trượt bậc cao (a) và dầm Bernoulli (b) trong trường hợp $\Omega = 80 \text{ (rad/s)}$

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng được công thức phần tử hữu hạn cho dầm trong đó sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao. Xây dựng được chương trình số dựa trên công thức PTHH đã thiết lập được với thuật toán số dựa trên phương pháp gia tốc trung bình trong họ các phương pháp Newmark, chương trình sử dụng ngôn ngữ Matlab để đưa ra ứng xử động học của dầm chịu tải trọng di động. Kết quả mô phỏng và tính toán dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc cao với sự lựa chọn hàm dạng Kosmatka so sánh với dầm Bernoulli cho thấy ứng xử động học của hai mô hình khá giống nhau. Điều đó cho thấy sự phù hợp và tin cậy của quá trình xây dựng công thức phần tử và mô phỏng khi sử dụng lý thuyết biến dạng trượt bậc cao với hàm dạng Kosmatka. Ngoài ra, kết quả đó cũng cho thấy các giả thuyết Euler-Bernoulli với ưu điểm đơn giản vẫn có độ tin cậy cao trong các ứng dụng thực tế của kết cấu dầm. ❖

Ngày nhận bài: **25/9/2022**

Ngày phản biện: **10/10/2022**

Tài liệu tham khảo:

- [1]. T.J.R. Hughes; *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover publication, Inc., Mineola, 2000.
- [2]. I.H. Shames and C.L. Dym; *Energy and finite element methods in structural mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [3]. Daryl L. Logan; *A first course in the Element Finite Method*. 4th Edition, Thomson Canada Limited, 2007.
- [4]. Y.W. Kwon and H. Bang; *Finite element method using Matlab*. CRC Press, New York, 2nd edition, 2000.
- [5]. D. C. Pham; *Essential solid mechanics*. Institute of Mechanics, Hanoi, 2013.
- [6]. Kosmatka. J.B; *An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams*, Computers and Structures. 57, pp. 141-149, 1995.
- [7]. M. Sim_ek, T. Kocaturk, D. Akbas; *Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load*. Composite Structures, 94, pp. 2358-2364, 2012.
- [8]. K. Rajabi, M.H. Kargarnovin, M. Gharini; *"Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler_Bernoulli beam subjected to a moving oscillator"*. Acta Mechanica, 224, pp. 425-446, 2013.
- [9]. Nguyen Dinh Kien, Tran Thanh Hai; *Dynamic analysis of prestressed Bernoulli beams resting on two-parameter foundation under moving harmonic load*. Vietnam Journal of Mechanics, 28, pp. 176-188, 2006.