

DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM CÓ CHIỀU DÀY BIẾN ĐỔI

FREE VIBRATIONS OF PLATES WITH VARIABLE THICKNESS

Thân Văn Toàn¹, Nguyễn Mạnh Dũng¹, Vũ Tú Nam¹, Đào Mạnh Lân²

¹Học viện Kỹ thuật Quân sự

²Nhà máy Z131

TÓM TẮT

Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn, bài báo nghiên cứu dao động của tấm có chiều dày biến đổi tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, các công thức được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, trong đó chiều dày tấm biến đổi theo cả quy luật tuyến tính và phi tuyến. Dựa trên lý thuyết tính toán, bài báo đã đưa ra so sánh để kiểm chứng độ tin cậy, trên cơ sở đó bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số tham số như quy luật biến đổi chiều dày, nền đàn hồi đến đáp ứng dao động riêng của tấm. Đây là nghiên cứu tiền đề để phát triển tính toán những bài toán phức tạp hơn trong cơ học vật rắn, cũng như làm tài liệu tham khảo có giá trị khi thiết kế và sử dụng những kết cấu có chiều dày biến đổi trong thực tế.

Từ khóa: Dao động riêng; Tấm; Chiều dày biến đổi; Phương pháp phần tử hữu hạn.

ABSTRACT

Based on the finite element method, the article studies the vibration of plates with variable thickness based on a two-factor elastic foundation, the formulas are established based on Mindlin's first-order shear strain theory, in the plate thickness varies according to both linear and nonlinear laws. Based on the theory of computation, the paper has made a comparison to verify the reliability, on that basis the article investigates the influence of some parameters such as the rule of thickness variation, elastic foundation on response to specific vibrations of the plate. This is a prerequisite study for the development of more complex problems in solid mechanics, as well as a valuable reference when designing and using structures of variable thickness in practice.

Keywords: Specific oscillations; Plate; Variable thickness; Extended finite element method.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các kết cấu dạng tấm được sử dụng rộng rãi trong nhiều ngành kỹ thuật như đóng tàu, vách ngăn lò phản ứng,... Tuy nhiên, để tối ưu hóa vật liệu hoặc tận dụng không gian làm việc, các kỹ sư đã thiết kế các tấm có chiều dày thay đổi, việc nghiên cứu đáp ứng cơ học của

các kết cấu tấm có chiều dày biến đổi là yêu cầu cấp thiết. Kết quả nghiên cứu là tài liệu quan trọng để định hướng cho việc thiết kế, chế tạo và sử dụng chúng một cách hiệu quả nhất.

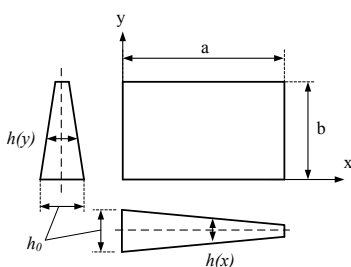
Cũng đã có một số nghiên cứu đáp ứng cơ học của tấm có chiều dày biến đổi như: P. Gagnon và C. Gosselin [1] phân tích uốn tĩnh

của tấm hình chữ nhật có chiều dày biến đổi sử dụng phương pháp dải phần tử (Finite Strip Method); tác giả Mạnh và nhóm cộng sự [2] nghiên cứu uốn tĩnh và ổn định tĩnh của tấm composite có chiều dày biến đổi; Thành và nhóm nghiên cứu [3] đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu uốn tĩnh của tấm có chiều dày biến đổi.

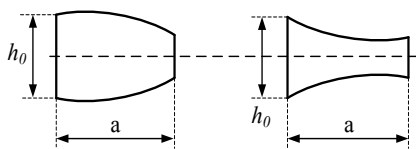
Các nghiên cứu đã có mới chỉ đề cập rất hạn chế đến bài toán dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi theo cả quy luật biến đổi tuyến tính và phi tuyến, do vậy bài báo này tập trung nghiên cứu và làm sáng tỏ vấn đề có ý nghĩa thiết thực này.

2. CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN TÍNH TOÁN TẤM NANO CÓ CHIỀU DÀY BIẾN ĐỔI VÀ CÓ VẾT NÚT VÀ CÓ KỀ ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA HIỆU ỨNG FLEXO

Xét tấm nano có chiều dày biến đổi và có vết nứt như trên hình 1, tấm có chiều dài và chiều rộng là a và b , tấm có chiều dày biến đổi tuyến tính và phi tuyến, trong đó chiều dày tấm tại gốc tọa độ là h_0 .



a. Chiều dày biến đổi tuyến tính



b. Chiều dày biến đổi phi tuyến

Hình 1. Mô hình tấm có chiều dày biến đổi

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, các thành phần chuyển vị được viết ở dạng sau:

$$u_x = u_0 + z\beta_x; \quad u_y = v_0 + z\beta_y; \quad u_z = w_0 \quad (1)$$

Trong đó, u_0 , v_0 , và w_0 là các thành phần chuyển vị dọc theo các trục x , y , z trong mặt phẳng trung bình của tấm, và β_x , β_y là các góc xoay quanh các trục y và x .

Tấm được chia thành các phần tử hữu hạn 3 điểm nút, mỗi nút có 5 bậc tự do chuyển vị là $\{u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y\}^T$. Các thành phần này được nội suy theo phương pháp phần tử hữu hạn như sau:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n N_i u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^n N_i v_{0i}; \quad \beta_x = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{xi};$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^n N_i \beta_{yi}; \quad w_0 = \sum_{i=1}^n N_i w_{0i} \quad (2)$$

Trong đó, $n = 3$ là số nút của phần tử, N_i là các hàm nội suy.

Trường biến dạng uốn của tấm:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x + z \partial \beta_x / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y + z \partial \beta_y / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x + z (\partial \beta_x / \partial y + \partial \beta_y / \partial x) \end{Bmatrix}$$

$$= \varepsilon_0 + z \varepsilon_1 = A_0 q_e + z A_1 q_e \quad (3)$$

Trong đó, $q_e = \{u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y\}^T$ là véc tơ chuyển vị nút phần tử, và các ma trận vi phân hàm dạng:

$$A_0 = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Trường biến dạng cắt của tấm:

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_s \mathbf{q}_e;$$

$$\mathbf{A}_s = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Quan hệ ứng suất – biến dạng được tính toán theo định luật Hooke như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}_\tau \boldsymbol{\gamma} \quad (7)$$

Trong đó:

$$\mathbf{F}_\sigma = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{F}_\tau = \begin{bmatrix} c_{66} & 0 \\ 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Thế năng biến dạng của tấm được tính toán như sau:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\tau}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0^T z \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1^T z^2 \mathbf{F}_\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{F}_\tau \boldsymbol{\gamma}) dV$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \left\{ \int_{S_e} \int_{-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \left(\mathbf{A}_0^T \mathbf{F}_\sigma \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T z \mathbf{F}_\sigma \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T z \mathbf{F}_\sigma \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^T z^2 \mathbf{F}_\sigma \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{F}_\tau \mathbf{A}_2 \right) dz dS \right\} \mathbf{q}_e$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad (9)$$

Trong đó, $\mathbf{K}_e$ là ma trận khối lượng của phần tử.

Động năng của tấm được tính toán như sau:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{S_e} \int_{-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}_0^2) dz dS$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_e \mathbf{q}_e \quad (10)$$

Trong đó, $\mathbf{M}_e$ là ma trận khối lượng của phần tử.

Phương trình xác định tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của tấm được tính toán từ phương trình:

$$(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{q}_e \quad (11)$$

Giải phương trình (11) sẽ thu được các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng tương ứng.

3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

3.1. Ví dụ kiểm chứng

Ví dụ 1: Tấm vuông có cạnh $a = b = 1$ m, chiều dày tấm biến đổi tuyến tính theo tọa độ x với biểu thức $h(x) = h_0 \left(1 + \beta \frac{x}{a} \right)$ với $\beta = 0.1$, $h_0 = a/100$. Các đặc trưng cơ tính vật liệu $E = 2.1$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ kg/m³. Kết quả tính toán và so sánh tần số không thứ nguyên

$$\Omega_i = \left(\frac{12 \rho a^4 \omega_i^2}{E h_0^2} \right)^{1/4} \text{ được thể hiện như trong}$$

bảng 1. Từ các kết quả so sánh này, có thể kết luận sự tin cậy của lý thuyết tính toán.

Bảng 1. So sánh Ω_i của tấm có chiều dày biến đổi.

Nguồn	Tần số				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
Bài báo	4.65	7.36	7.36	9.31	10.40
[4]	4.67	7.44	7.44	9.43	10.69
Sai lệch %					

3.1.1. Khảo sát số

Tấm có các kích thước $a = b = 0.5\text{m}$, tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số với các tham số của nền đàn hồi:

$$k_1 = k_w \frac{12a^4}{Eh_0^3}, \quad k_2 = k_s \frac{12a^2}{Eh_0^3}.$$

Chiều dày tấm biến đổi theo quy luật tuyến tính và phi tuyến theo các dạng sau:

+ Tấm có chiều dày chỉ biến đổi tuyến tính theo trục x: $h = h_0(1 - \beta x/a)$.

+ Tấm có chiều dày biến đổi tuyến tính theo cả trục x và y: $h = h_0(1 - \beta x/a)(1 - \beta y/b)$

+ Tấm có chiều dày biến đổi phi tuyến theo trục x: $h = h_0(1 - \beta(x/a)^2)$

+ Tấm có chiều dày biến đổi phi tuyến theo cả trục x và y:

$$h = h_0(1 - \beta(x/a)^2)(1 - \beta(y/b)^2)$$

Với $h_0 = a/100$. Các đặc trưng cơ tính vật liệu tấm: $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$.

Kết quả tính toán là tần số không thứ

$$\text{nguyên } \tilde{\Omega}_i = \omega_i \frac{a^2}{h_0} \left(\frac{\rho}{E} \right)^{1/2}.$$

- Ảnh hưởng của quy luật biến đổi chiều dày tấm

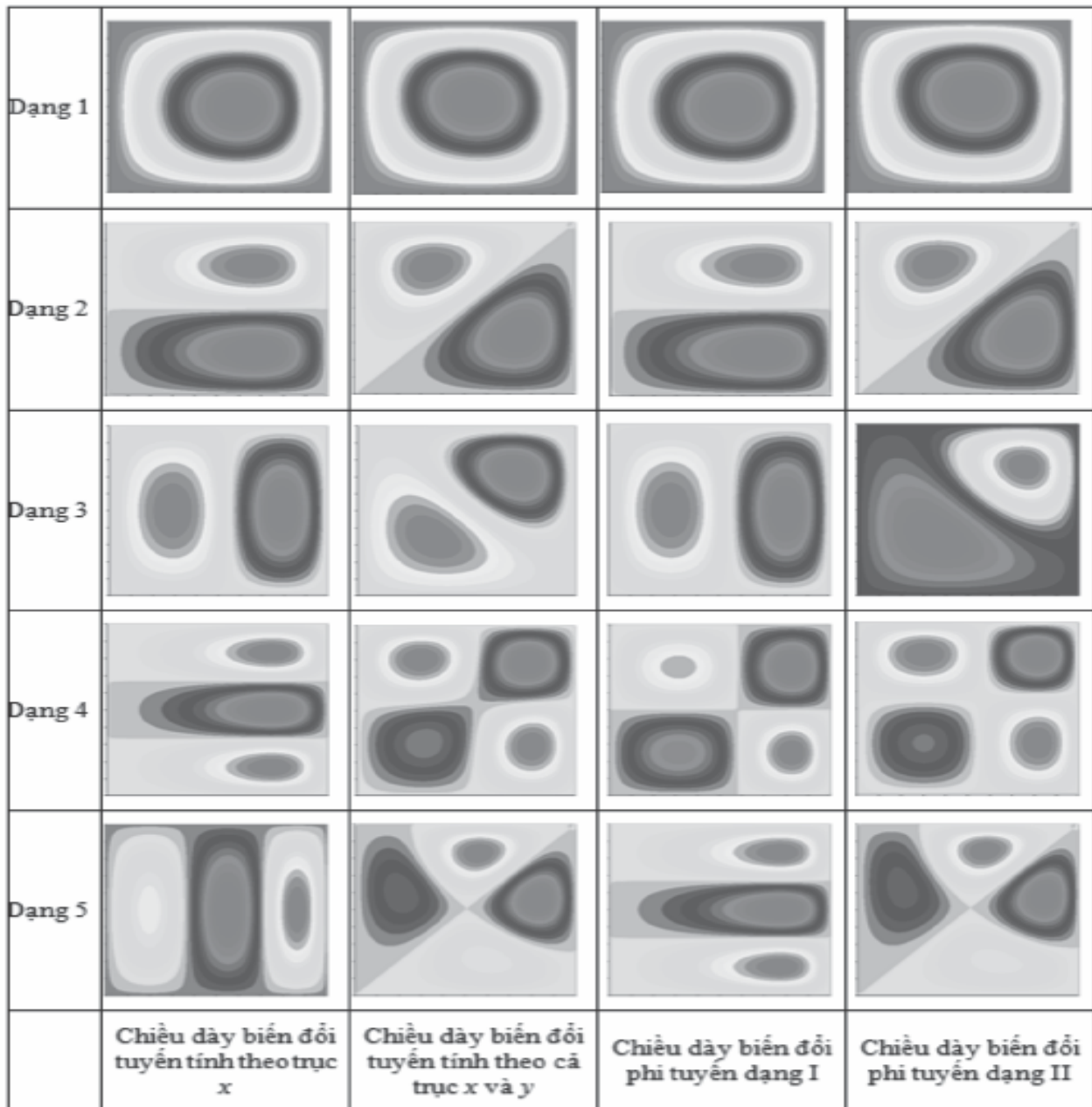
Để thấy rõ ảnh hưởng của quy luật biến đổi chiều dày tấm đến đáp ứng dao động riêng của tấm, tham số β của chiều dày tăng từ 0.2 đến 0.6. Kết quả tính toán năm tần số dao động riêng đầu tiên được thể hiện trong bảng 2. Từ kết quả này, có thể thấy rằng khi tham số β tăng lên, tần số dao động riêng của tấm giảm xuống, điều này được giải thích rằng tham số β làm thay đổi cả khối lượng và độ cứng của tấm, nhưng khi giá trị của tham số này tăng lên, độ cứng tăng chậm hơn so với sự tăng lên của khối lượng, nên tần số giảm xuống. Tấm có chiều dày biến đổi phi tuyến theo trục x có tần số lớn nhất và tấm có chiều dày biến đổi tuyến tính theo cả trục x và trục y có tần số dao động nhỏ nhất.



Bảng 2. Sự phụ thuộc của năm tần số dao động riêng đầu tiên vào tham số β , $k_1 = 20$, $k_2 = 5$

β	$\tilde{\Omega}_i$	Tấm có chiều dày biến đổi theo các quy luật			
		Chiều dày biến đổi tuyến tính theo trục x	Chiều dày biến đổi tuyến tính theo cả trục x và y	Chiều dày biến đổi phi tuyến theo trục x	Chiều dày biến đổi phi tuyến theo cả trục x và y
0.2	1	6.313	5.968	6.441	6.174
	2	14.289	13.128	14.763	13.931
	3	14.302	13.147	14.746	13.956
	4	22.332	20.369	23.058	21.668
	5	27.568	25.064	28.606	26.894
	6	27.659	25.064	28.666	26.900
0.6	1	5.668	5.524	5.894	5.460
	2	11.672	10.022	12.872	11.130
	3	11.792	10.348	12.903	11.239
	4	17.940	14.638	19.922	16.783
	5	21.001	17.035	23.893	19.965
	6	21.816	17.150	24.413	20.047

Trên hình 2 thể hiện năm tần số dao động riêng của tấm có các quy luật biến đổi chiều dày khác nhau, nhìn vào các dạng dao động riêng, có thể thấy rằng quy luật biến đổi chiều dày làm thay đổi đáng kể các dạng dao động riêng của tấm.



Hình 2. Năm dạng mặt ổn định của tấm phụ thuộc quy luật biến đổi chiều dày tấm

- Khảo sát ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi

Phần này sẽ xem xét ảnh hưởng của độ cứng nền đàn hồi, tham số k_1 và k_2 thay đổi từ 0 đến 100, kết quả tính toán tần số dao động riêng đầu tiên được thể hiện như trong bảng 3. Các kết quả tính toán cho thấy khi tăng độ cứng của nền đàn hồi, tần số dao động của tấm tăng lên, điều này là do độ cứng của tấm được tăng lên do bổ sung nền đàn hồi, nhưng khối lượng của tấm không thay đổi, do vậy tần số dao động của tấm tăng lên.



Bảng 3. Sự phụ thuộc của tần số dao động riêng đầu tiên vào tham số k_1 , k_2 , $\beta = 0.6$

k_1	k_2	Tấm có chiều dày biến đổi theo các quy luật			
		Chiều dày biến đổi tuyến tính theo trục x	Chiều dày biến đổi tuyến tính theo cả trục x và y	Chiều dày biến đổi phi tuyến theo trục x	Chiều dày biến đổi phi tuyến theo cả trục x và y
0	0	4.084	2.799	4.666	3.654
	1	4.396	3.462	4.897	4.034
	2	4.684	3.987	5.116	4.370
	10	6.491	6.668	6.575	6.339
	100	15.945	18.471	14.942	15.971
100	0	5.415	5.166	5.687	5.164
	1	5.649	5.514	5.875	5.426
	2	5.872	5.833	6.057	5.670
	10	7.376	7.855	7.320	7.262
	100	16.309	18.906	15.272	16.337

4. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày nghiên cứu về dao động tự do của tấm có chiều dày biến đổi theo nhiều quy luật khác nhau. Các công thức phân tử hữu hạn được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất và tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, chiều dày tấm giả thiết biến đổi theo cả quy luật tuyến tính và phi tuyến. Các kết quả so sánh được thực hiện nhằm kiểm chứng độ tin cậy của lý thuyết tính toán. Trên cơ sở đó, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố như ảnh hưởng của quy luật biến đổi của chiều dày, nền đàn hồi đến đáp ứng dao động tự do của tấm nano. Các kết quả tính toán chỉ ra rằng khi tăng hệ số độ cứng của nền đàn hồi thì tấm trở nên cứng hơn, nên tần số dao động của tấm tăng lên. Quy luật biến đổi chiều dày không chỉ ảnh hưởng tới giá trị của các tần số dao động riêng đầu tiên mà còn ảnh hưởng tới các dạng dao động riêng của tấm. Các kết quả tính toán này là tài liệu tham khảo có giá trị khi thiết kế, chế tạo và sử dụng tấm có chiều dày biến đổi trong thực tế. ❖

Ngày nhận bài: 28/8/2023

Ngày phản biện: 06/9/2023

Tài liệu tham khảo:

- [1]. P. Gagnon, C. Gosseln (1997). *The Finite Strip Element for the Analysis of Variable Thickness Rectangular Plate*. Computers Structures, 63(2), 349-362.
- [2]. T. Le-Manh, Q. Huynh-Van, Thu D. Phan, Huan D. Phan, H. Nguyen-Xuan (2017), *Isogeometric Nonlinear Bending and Buckling Analysis of Variable-Thickness Composite Plate Structures*. Composite Structures, 159, 818-826.
- [3]. Tran Trung Thanh, Do Van Thom, Doan Trac Luat, Tran Van Ke (2018). *Static Bending Analysis of Variable-thickness FGM Plates Based on Mindlin Theory and Finite Element Method*. Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, tập 3, quyển 2, 1038-1045.
- [4]. Sakiyama, M. Huang. *Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with Variable Thickness*. Reports of the Faculty of Engineering, Nagasaki University, 28(51).