

PHÂN TÍCH UỐN TĨNH CỦA VỎ HAI ĐỘ CONG CÓ LỖ RỖNG SỬ DỤNG PHẦN TỬ HỮU HẠN

STATIC BENDING ANALYSIS OF FGP DOUBLY-CURVED SHELL USING FEM

Nguyễn Thị Hải Vân

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật, Đại học Đà Nẵng

TÓM TẮT

Bài báo trình bày kết quả phân tích bài toán uốn tĩnh của vỏ hai độ cong bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), trong đó vỏ thỏa mãn lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, vỏ làm bằng vật liệu FGM có lỗ rỗng vi mô. Lý thuyết tính toán được lập trình trong môi trường Matlab, có so sánh với các kết quả đã công bố để kiểm chứng độ tin cậy. Trên cơ sở thuật toán và chương trình đã lập, bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số tham số như về vật liệu, đặc trưng hình học của vỏ FGM hai độ cong đến đáp ứng uốn tĩnh của vỏ.

Từ khóa: FGM; Vỏ hai độ cong; Lỗ rỗng vi mô.

ABSTRACT

This paper presents the analysis results of the static bending of doubly-curved shells by the finite element method, in which the shell satisfies the first-order shear strain theory, the shell is made of FGM material with porosity. Calculation theory is programmed in Matlab environment, compared with published results to verify reliability. On the basis of the established algorithm and program, the article investigates the influence of some parameters such as material, geometrical characteristics of the two-curvature FGM shell on the static bending response of the shell.

Keywords: FGM; Doubly-curved shell; Porosity.

1. MỞ ĐẦU

Các kết cấu dạng vỏ thường được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật, chúng thường được sử dụng để làm bể chứa, ống dẫn. Vật liệu composite có cơ tính biến thiên (Functionally Graded Material, viết tắt là FGM) là loại vật liệu được chế tạo bằng cách pha trộn hai thành phần bao gồm kim loại (metal) và gốm (ceramic) theo một tỷ lệ thể tích nhất định được phân bố theo chiều dày của lớp vật liệu với dạng hàm

số mũ của biến chiều dày. Tính chất cơ học của vật liệu sẽ biến thiên một cách liên tục từ mặt này đến mặt kia của vỏ, cho phép khắc phục được nhược điểm của vỏ composite lớp là hiện tượng bong tách lớp, do đó vật liệu FGM ngày càng được sử dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp quan trọng như xây dựng lò phản ứng hạt nhân, vũ trụ,... Trong quá trình chênh lệch nhiệt độ của các pha vật liệu thành phần, các lỗ rỗng vi mô thường hình thành trong quá trình chế tạo vật liệu FGM. Trong luật phối trộn

này, thể tích lỗ rỗng được giả định phân chia đều cho cả hai pha, pha gốm và pha kim loại. Các nghiên cứu về vỏ có thể tìm thấy trong các nghiên cứu [1-3].

Tuy nhiên, các nghiên cứu sử dụng phương pháp số cho các kết cấu vỏ hai cong vẫn còn hạn chế, chủ yếu là sử dụng các phương pháp giải tích cho các điều kiện biên và hình dạng vỏ đơn giản. Chính vì lý do trên, bài báo này trình bày phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) để phân tích uốn tĩnh của vỏ hai độ cong có cơ tính biến thiên theo chiều dày và lỗ rỗng tế vi. Ảnh hưởng của độ cong, điều kiện hình học, lỗ rỗng tế vi đến đáp ứng chuyển vị thẳng đứng của vỏ được khám phá. Các kết quả này có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho các nghiên cứu tiếp theo về dao động riêng, ổn định và các bài toán phi tuyến.

2. CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

2.1. Vỏ hai độ cong làm bằng vật liệu FGM có lỗ rỗng vi mô

Giả sử vật liệu cơ tính biến thiên được sử dụng tính toán trong bài báo này được làm từ hai loại vật liệu thành phần là gốm và kim loại, sự phân bố tỷ lệ thành phần của hai vật liệu này tuân theo quy luật của hàm số mũ. Tỷ lệ thành phần thể tích của chúng giả thiết như sau [2]:

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k, \quad V_m = 1 - V_c \quad (1)$$

Trong đó: V_c , V_m tương ứng là tỷ lệ thể tích của gốm và kim loại; z là tọa độ theo phương chiều dày vỏ; h là chiều dày vỏ; k là hệ số mũ thể tích; c , m tương ứng là chỉ số kí hiệu cho gốm và kim loại.

Trong trường hợp chưa kể đến sự xuất hiện của các lỗ rỗng vi mô bên trong vật liệu,

mô đun đàn hồi Young (E) và hệ số Poát Xông (ν) của vật liệu FGM phụ thuộc vào tỷ lệ thành phần vật liệu theo biểu thức [2]:

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m; \nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m \quad (2)$$

Trong trường hợp có kể đến các lỗ rỗng vi mô bên trong vật liệu, giả sử hệ số tỷ lệ lỗ rỗng vi mô là α , các đặc trưng cơ tính của vật liệu lúc này phụ thuộc cả vào tỷ lệ thể tích vật liệu và hệ số lỗ rỗng như sau:

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m); \nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m - \frac{\alpha}{2}(\nu_c + \nu_m) \quad (3)$$

2.2. Công thức phần tử hữu hạn tính toán vỏ hai độ cong có lỗ rỗng vi mô chịu tác dụng của tải trọng tĩnh

Xét vỏ thoải hai độ cong có hình chiếu bằng hình chữ nhật, với các kích thước vỏ lần lượt là a , b và chiều dày h ; các thành phần chuyển vị tại điểm có tọa độ (x, y, z) được biểu diễn dưới dạng [2]:

$$u(x, y, z) = u_0 + z\theta_x; v(x, y, z) = v_0 + z\theta_y; w(x, y, z) = w_0 \quad (4)$$

Trong đó: u_0 , v_0 , w_0 là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của vỏ; θ_x , θ_y là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh x , y .

Các biến dạng uốn và biến dạng cắt ngang của vỏ được lấy là [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_u = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0}{R_x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w_0}{R_y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x - \frac{u_0}{R_x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y - \frac{v_0}{R_y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$



Ở đây: R_x, R_y là các bán kính cong theo phương trục x và trục y.

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng theo định luật Hook có dạng [1]:

$$\sigma_u = D_u \varepsilon_u; \sigma_c = D_c \varepsilon_c \quad (6)$$

Để giải quyết bài toán đặt ra, bài báo sử dụng phần tử đẳng tham số 8 nút, mỗi nút có 5 bậc tự do, chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử vỏ được xác định như sau [1]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{i=1}^8 N_i(r, s) u_{0i}, \quad v_0 = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s) v_{0i}, \\ w &= \sum_{i=1}^8 N_i(r, s) w_i; \theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s) \theta_{xi}, \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^8 N_i(r, s) \theta_{yi} \end{aligned} \quad (7)$$

Trong đó, $N_i(r, s)$ là các hàm dạng tương ứng của phần tử 8 nút. Viết gọn biểu thức trên dưới dạng ma trận, ta có:

$$\{u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y\}^T = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}_e \quad (8)$$

Thay biểu thức (6) vào biểu thức biến dạng ở trên, ta thu được:

$$\varepsilon_u = \mathbf{B}_u \cdot \mathbf{q}_e; \varepsilon_c = \mathbf{B}_c \cdot \mathbf{q}_e \quad (9)$$

Với:

$$\mathbf{B}_u = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{N_i}{R_x} z \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{N_i}{R_y} & 0 \\ -\beta \frac{\partial N_i}{\partial y} & \beta \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & z \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}; \mathbf{B}_c = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} -\frac{N_i}{R_x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \\ 0 & -\frac{N_i}{R_y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{Với: } \beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right)$$

Thế năng của phần tử vỏ khi kể đến ngoại lực tác dụng có dạng:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_u^T D_u \varepsilon_u dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_c^T D_c \varepsilon_c dV - \int_{V_e} \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e dV = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}_u^T D_u \mathbf{B}_u dV + \int_{V_e} \mathbf{B}_c^T D_c \mathbf{B}_c dV \right) \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_e dV \end{aligned} \quad (11)$$

Cực tiểu thế năng, ta thu được phương trình cân bằng tĩnh của phần tử vỏ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh như sau:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{q}_e = \mathbf{F}_e \quad (12)$$

Trong đó, ma trận độ cứng phần tử và véc tơ tải trọng nút phần tử được xác định như sau:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}_u^T D_u \mathbf{B}_u dV + \int_{V_e} \mathbf{B}_c^T D_c \mathbf{B}_c dV \\ \mathbf{F}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_e dV \end{cases} \quad (13)$$

Sau khi ghép nối ma trận và khử điều kiện biên, ta thu được phương trình cân bằng tĩnh của vỏ:

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (14)$$

Tiến hành giải phương trình (14) trong môi trường Matlab, thu được chuyển vị, ứng suất, nội lực của điểm bất kỳ thuộc vỏ.

3. KHẢO SÁT SỐ

3.1. Kiểm tra độ tin cậy của chương trình tính

Xét vỏ cầu ($R = R_x = R_y$) phân lớp chịu liên kết tựa đơn trên 4 cạnh (SSSS) chịu tác dụng của lực phân bố đều trên toàn bộ bề mặt với cường độ q_0 . Thông số kết cấu và vật liệu như sau: $a=b, E_1=25E_2, G_{23}=0.2E_2, G_{13}=G_{12}=25E_2, \nu_{12}=0.25$. Góc xếp lớp $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$. Kết quả điểm chuyển vị không thứ nguyên $\bar{w} = 1000w_0 E_2 h^3 / (q_0 a^4)$, khi thay đổi tỷ số R/a với tỷ lệ h/a khác nhau so sánh với Reddy trong tài liệu [1] như bảng dưới đây:

R/a	h/a = 100		h/a = 10	
	Tác giả	[1]	Tác giả	[1]
1	0.0715	0.0715	4.8369	4.8366
2	0.2844	0.2844	8.0513	8.0517
3	0.6246	0.6246	9.1456	9.1463
4	1.0558	1.0559	9.5992	9.5999
5	1.5357	1.5358	9.8241	9.8249
10	3.7207	3.7208	10.140	10.141
10^{30}	6.8330	6.8331	10.252	10.251

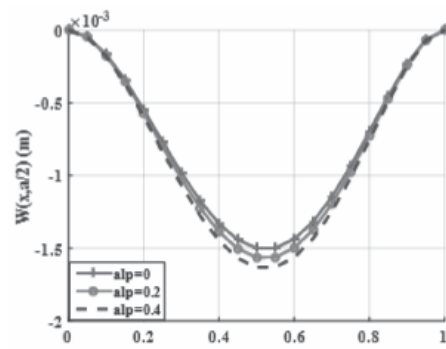
Nhận xét: Các kết quả so sánh chuyển vị tại điểm không thứ nguyên của tác giả so với [1] hầu như trùng khớp nhau, điều đó chứng tỏ chương trình tính tác giả đã lập đảm bảo độ tin cậy.

3.2. Phân tích uốn tĩnh của vỏ FGM hai độ cong có lỗ rỗng tế vi

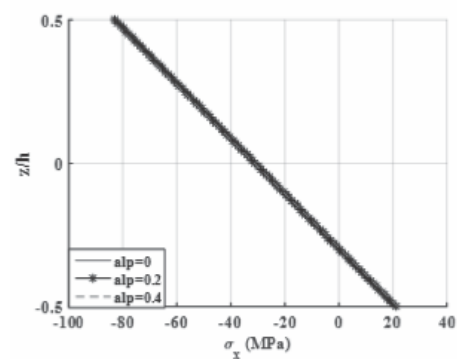
Xét vỏ FGM hai độ cong có các thông số vật liệu và kết cấu như sau: $a = b = 1\text{m}$, $h = a/100$; $R = R_x = R_y = 10a$; $E_c = 300\text{GPa}$, $E_m = 200\text{GPa}$, $\nu_c = \nu_m = 0.3$; chỉ số mũ $k = 1$; thể tích lỗ rỗng tế vi: α (trong đồ thị ký hiệu là αp) chịu liên kết ngàm 4 cạnh (CCCC) dưới tác dụng của lực phân bố đều với cường độ $q_0 = 10^5 \text{ (N/m}^2\text{)}$ trên bề mặt vỏ. Kết quả điểm chuyển vị của đường giữa tấm $W(x, a/2)$, ứng suất pháp tuyến σ_x tại mặt cắt điểm giữa tấm như trong hình 1.

Gọi $W^* = \frac{\min(w).10^3.E_m.h^3}{P_0.a^4}$ là chuyển vị

không thứ nguyên lớn nhất của tấm.



a) Đường chuyển vị



b) Ứng suất pháp tuyến

Hình 1. Đồ thị đường chuyển vị và ứng suất pháp tuyến của vỏ.

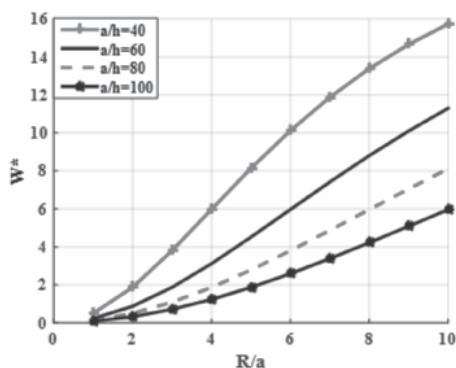
Nhận xét: Từ các đồ thị trên, ta thấy ảnh hưởng của lỗ rỗng tế vi làm cho chuyển vị và ứng suất tăng khi thể tích lỗ rỗng tăng, vì nó làm cho cơ tính của tấm thay đổi, mô đun đàn hồi E và hệ số Poát xôn của tấm nhỏ đi.

3.3. Khảo sát các yếu tố ảnh hưởng đến uốn tĩnh của vỏ FGM

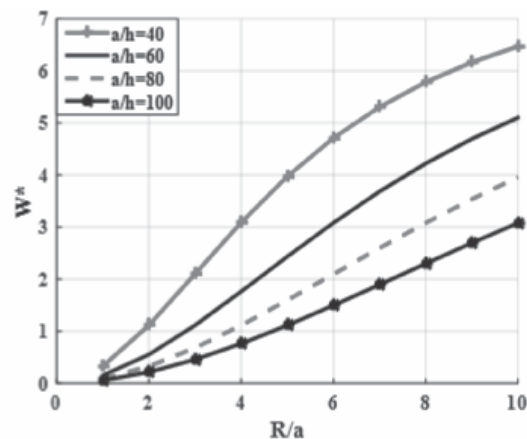
3.3.1. Khảo sát ảnh hưởng của độ dày vỏ theo bán kính R

Để đánh giá ảnh hưởng của độ dày của vỏ đến chuyển vị lớn nhất của điểm giữa vỏ, ta lần lượt cho tỷ lệ chiều dày vỏ thay đổi từ $\frac{a}{h} = [40; 60; 80; 100]$, tỷ lệ thể tích lỗ rỗng $\alpha = 0.1$. Với hai trường hợp tấm chịu liên kết là tựa đơn bốn cạnh (SSSS) và ngàm bốn cạnh (CCCC), ta thu được kết quả chuyển vị W^* điểm chính giữa tấm như trên hình 2.

Nhận xét: Từ các đồ thị ta thấy, khi tỷ lệ a/h càng lớn, với kích thước a không đổi thì độ dày vỏ càng mỏng, làm cho giá trị chuyển vị lớn nhất W^* của điểm chính giữa càng giảm. Bán kính vỏ R càng tăng, làm cho giá trị chuyển vị lớn nhất W^* điểm chính giữa cũng tăng lên, nhưng có xu hướng bằng nhau khi R càng lớn do lúc này vỏ biến thành tấm phẳng khi R tiến ra vô cùng.



a) Điều kiện biên SSSS

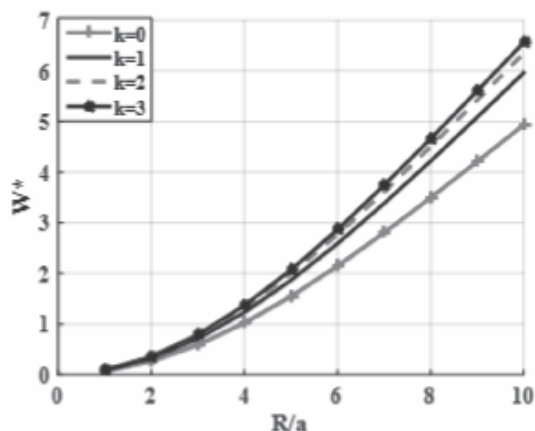


b) Điều kiện biên CCCC

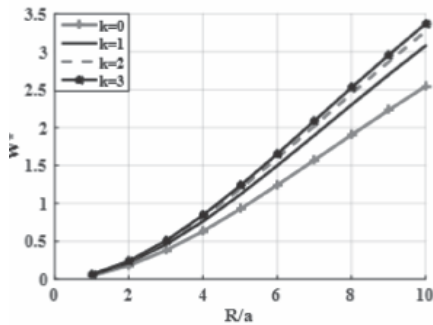
Hình 2. Đồ thị ảnh hưởng của độ dày vỏ theo bán kính R

3.3.2. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số mũ k của vỏ theo bán kính R

Đối với vật liệu FGM, hệ số chỉ số mũ vật liệu n là hệ số quyết định rất lớn đến cơ tính của vật liệu do cơ tính vật liệu biến đổi theo hàm mũ k của chiều dày z . Do đó, để đánh giá ảnh hưởng của hệ số k đến giá trị chuyển vị lớn nhất của vỏ FGM khi phân tích uốn tĩnh, ta cho k thay đổi từ 1 đến 10, với các giá trị khác của kết cấu vỏ giữ nguyên như trong bài toán cơ bản. Kết quả chuyển vị W^* được thể hiện như các Hình 3a và Hình 3b.

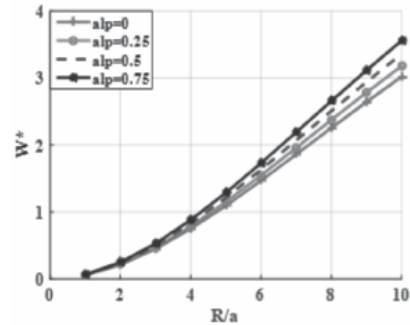


a) Điều kiện biên SSSS



b) Điều kiện biên CCCC

Hình 3. Đồ thị ảnh hưởng của chỉ số mũ vật liệu theo bán kính R



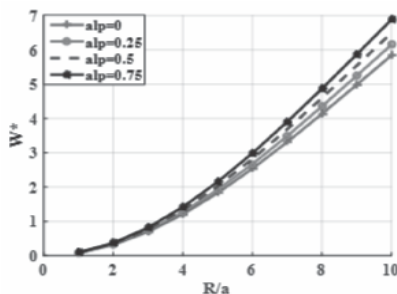
b) Điều kiện biên CCCC

Hình 4. Đồ thị ảnh hưởng của thể tích lỗ rỗng theo bán kính R

Từ các đồ thị trên ta thấy, chỉ số mũ k càng tăng, làm cho tỷ lệ gồm trong vật liệu FGM càng giảm dẫn đến cơ tính của vật liệu giảm đi, do đó nhìn vào đồ thị ta thấy k tăng làm cho chuyển vị W^* tăng theo lên. Với xu hướng tăng này, ta có thể thấy khi k tiến đến giá trị đủ lớn thì tỷ lệ kim loại trong vật liệu FGM sẽ chiếm hầu hết và lúc này chuyển vị W^* sẽ tiến đến giá trị hằng số.

3.3.3. Khảo sát ảnh hưởng của thể tích lỗ rỗng α của vỏ theo bán kính R

Vật liệu FGM có lỗ rỗng tẽ vi, làm cho cơ tính của nó thay đổi rất nhiều, nên để đánh giá sự ảnh hưởng đó, ta cho tỷ lệ lỗ rỗng α thay đổi từ 0; 0,25; 0,50; 0,75. Với các tham số khác giữ nguyên, kết quả ảnh hưởng của α đến chuyển vị W^* được thể hiện như Hình 4a và Hình 4b.

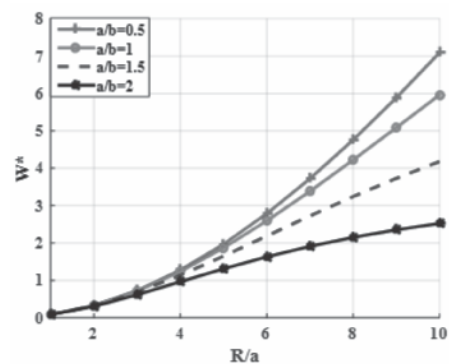


a) Điều kiện biên SSSS

Từ các đồ thị ta thấy, khi tỷ lệ lỗ rỗng tẽ vi α tăng lên, làm cho chuyển vị W^* cũng tăng theo. Sự khác biệt này càng rõ rệt hơn khi mà bán kính R tăng. Điều đó có thể giải thích rằng khi tỷ lệ lỗ rỗng tăng lên mà các tham số khác không thay đổi sẽ làm cho các thuộc tính của vật liệu FGM giảm đi, vỏ trở lên mềm hơn, dưới tác dụng của lực không đổi thì làm cho chuyển vị tăng lên.

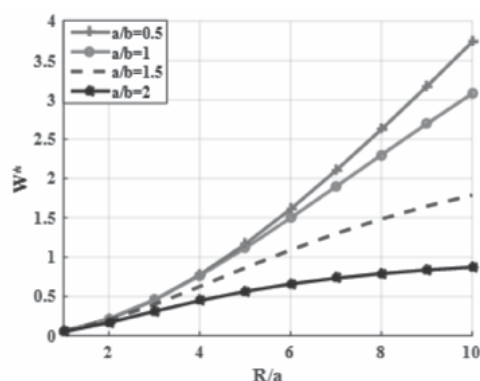
3.3.4. Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số a/b của vỏ theo bán kính R

Tiếp theo, ta đánh giá sự ảnh hưởng của tỷ lệ a/b đến chuyển vị W^* của vỏ. Ta cho a/b thay đổi từ 0,5; 1; 1,5; 2,0. Các tham số khác giữ nguyên như kết cấu vỏ của bài toán cơ bản. Kết quả chuyển vị W^* như Hình 5a và Hình 5b.



a) Điều kiện biên SSSS





b) Điều kiện biên CCCC

Hình 5. Đồ thị ảnh hưởng của tỷ lệ a/b theo bán kính R

Từ các đồ thị trên ta thấy, khi tỷ lệ a/b tăng lên làm cho chuyển vị W^* giảm đi, sự khác biệt này càng rõ rệt khi mà tỷ lệ R/a tăng dần lên. Với điều kiện biên CCCC làm chuyển vị W^* nhỏ nhất.

4. KẾT LUẬN

Dựa trên phương pháp PTHH, lý thuyết cắt bậc nhất, tác giả đã xây dựng các phương trình lý thuyết, từ đó viết chương trình tính trên ngôn ngữ Matlab. Bài báo đã khảo sát, đánh giá được ảnh hưởng của các tham số như bán kính cong của vỏ, hệ số mũ thể tích k , tỷ lệ lỗ rỗng α ... đến chuyển vị của vỏ dưới tác dụng của tải

trọng tĩnh, từ đó làm cơ sở cho việc tính toán thiết kế vỏ FGM hai độ cong phục vụ cho các nhu cầu kỹ thuật trong thực tiễn.

Với thuật toán, chương trình tính đã lập, có thể làm cơ sở cho việc tính toán phân tích dao động riêng của vỏ FGM hai độ cong, bài toán ổn định, bài toán đáp ứng động của vỏ dưới tác dụng của xung nổ, v.v... ❖

Ngày nhận bài: **10/7/2023**

Ngày phản biện: **03/8/2023**

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plate and Shell*, 2nd ed.; CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 2004.
- [2]. Quoc-Hoa Pham, Phu-Cuong Nguyen, Van-Ke Tran and Trung Nguyen-Thoi. *Finite element analysis for functionally graded porous nanoplates resting on elastic foundation*. Steel and Composite Structures, Vol. 41, No. 2 (2021) 000-000.
- [3]. Trung Thanh Tran et al., *Forced Vibration Analysis of Laminated Composite Shells Reinforced with Graphene Nanoplatelets Using Finite Element Method*. Advances in Civil Engineering, 2020, Volume 2020.