

PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA DẦM CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN VỚI NGẪU NHIÊN MÔ ĐUN ĐÀN HỒI

FREE VIBRATION ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL BEAMS WITH RANDOM UNCERTAIN ELASTIC MODULUS

Nguyễn Văn Thuận
Trường Đại học Nha Trang

TÓM TẮT

Dao động tự do của dầm vật liệu có cơ tính biến thiên được khảo sát bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Mô đun đàn hồi của dầm theo chiều cao được giả thiết theo quy luật hàm số mũ. Bài báo này trình bày sự biến thiên của véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên dựa trên ngẫu nhiên tính toán phần tử hữu hạn. Mô đun đàn hồi của dầm có cơ tính biến thiên được giả thiết là biến không chắc chắn theo trường ngẫu nhiên một chiều. Ngẫu nhiên mô đun đàn hồi theo trường ngẫu nhiên sử dụng dưới dạng phổ và xác định véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo.

Từ khóa: Dao động tự do; Vật liệu cơ tính biến thiên; Dầm; Mô phỏng Monte Carlo.

ABSTRACT

The free vibration of functionally graded material (FGM) beams is investigated by finite element method. Young's modulus of the beam is assumed to vary in high following the exponential law. This paper develops a stochastic finite element method to calculate the variation of eigenvectors of functionally graded beams. The modulus of functionally graded material is assumed to have spatial uncertainty as one-dimension random field. The random field of elastic modulus is represented by using spectral representation to determine the eigenvector of functionally graded beam to employ Monte Carlo simulation.

Keywords: Free vibration; Functionally graded materials; Beam; Monte Carlo simulation.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Những năm gần đây, vật liệu có cơ tính biến thiên (functionally graded material) thu hút được rất nhiều sự quan tâm từ các nhà nghiên cứu và khoa học. Ý tưởng của vật liệu chức năng được giới thiệu vào năm 1984 trong một dự án về không gian của Nhật Bản [1]. Vật liệu có cơ tính biến thiên không những là

một đối tượng nghiên cứu nhiều tiềm năng cho ngành công nghiệp composite tiên tiến mà còn cả các lĩnh vực khác như không gian, ô tô, điện tử và gần đây là công nghiệp sinh học và hàng không [2, 3]. Kết cấu bằng vật liệu có cơ tính biến thiên vì thế đã thu hút được nhiều nhà nghiên cứu trong thời gian gần đây. Tác giả Alshorbagy và các cộng sự đã phân tích dao động của dầm bằng vật liệu cơ tính biến thiên 

với quy luật vật liệu biến đổi theo hàm lũy thừa, theo chiều cao dầm dựa trên bài toán tiền định là phương pháp phần tử hữu hạn [4]. Nhà nghiên cứu Chakraborty và các cộng sự của mình lại sử dụng cả hai phương pháp phần tử hữu hạn và lời giải chính xác để giải quyết bài toán tĩnh cho dầm có cơ tính biến thiên [5]. Nghiên cứu tính toán phi tuyến vật liệu cho bài toán dao động của dầm vật liệu cơ tính biến thiên theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli được tác giả Liang và các cộng sự công bố vào năm 2009 [6]. Phân tích ứng suất và biến dạng của tấm vật liệu cơ tính biến thiên trên nền đàn hồi Winkler-Pasternak được trình bày trong nghiên cứu của Benyoucef và các cộng sự [7]. Nhà nghiên cứu Hassen Ait Atmane và các cộng sự tập trung phân tích tần số dao động của dầm có cơ tính biến thiên với bằng cắt thay đổi khi mô đun đàn hồi tuân theo quy luật hàm số mũ [8]. Tác giả Thuan và các cộng sự cũng nghiên cứu tính toán tần số dao động của dầm có cơ tính biến thiên với mô đun đàn hồi tuân theo quy luật hàm số mũ bằng cả hai phương pháp phần tử hữu hạn và lời giải chính xác [9]. Nghiên cứu sự biến đổi của tần số dao động của dầm có cơ tính biến thiên với các biến vật liệu là hàm ngẫu nhiên bằng phương pháp phi thống kê và mô phỏng Monte Carlo dựa trên bài toán phần tử hữu hạn [10-11]. Tuy nhiên, những nghiên cứu trên phần lớn tập trung phân tích giá trị riêng của tần số dao động của dầm có cơ tính biến thiên cho hai bài toán tiền định và xác suất. Những phân tích cho véc tơ riêng cho bài toán dao động còn rất hạn chế và ít được các nhà nghiên cứu quan tâm.

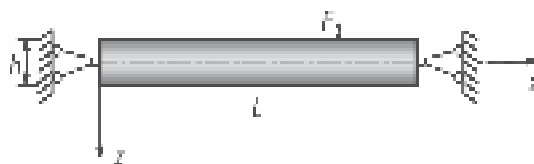
2. PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA DẦM CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Trong nghiên cứu này, giả thiết mô hình dầm có cơ tính biến thiên với chiều dài của dầm là L , chiều cao H và bề rộng là b (hình 1). Mô

đun đàn hồi (E) của dầm có cơ tính biến thiên được giả thiết tuân theo quy luật hàm số mũ như công thức 1.

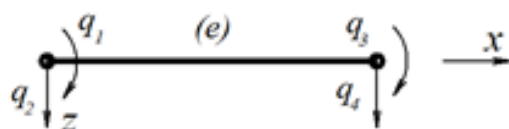
$$E(z) = E_0 e^{|z|} \quad (1)$$

Trong đó, E_0 là mô đun đàn hồi tại trục giữa của dầm có cơ tính biến thiên.



Hình 1. Mô hình dầm có cơ tính biến thiên

Mô hình phần tử của dầm có cơ tính biến thiên được giả thiết với bốn bậc tự do như hình 2. Chuyển vị của dầm được giả thiết theo hàm bậc cao với bốn bậc tự do và được nội suy bằng hàm Hermite. Trong đó, chuyển vị thẳng là q_2 và q_4 , chuyển vị xoay là q_1 và q_3 .



Hình 2. Phần tử dầm

Véc tơ chuyển vị phần tử của dầm:

$$\{q\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \quad (2)$$

Trường chuyển vị được xác định bởi:

$$w_e = \langle N \rangle \{q\}_e \quad (3)$$

Trong đó, hàm dạng:

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle.$$

Các công thức năng lượng lần lượt được thiết lập của dầm. Năng lượng biến dạng

uốn được thể hiện qua công thức:

$$U_e = \int_0^{L_e} \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

Động năng của dầm chịu uốn được xác định theo công thức:

$$T_e = \int_0^{L_e} \frac{m b_e \dot{w}_e^2}{2} dx \quad (5)$$

Thế công thức 3 vào các công thức 4 và 5, chúng ta thu được các công thức như sau:

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T \tilde{K}_e \{q\}_e \quad (6)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T M_e \{\dot{q}\}_e \quad (7)$$

Sử dụng nguyên lý Hamilton và công thức biến phân chuyển động thu được công thức:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_1^N U_e - \sum_1^N T_e \right) dt = 0 \quad (8)$$

Thay các công thức 6, 7 vào công thức 8, chúng ta thu được phương trình:

$$M\ddot{w} + Kw = 0 \quad (9)$$

Trường hợp này, w là chuyển vị của dầm theo phương z . N là số phần tử của dầm.

Theo nguyên lý dao động điều hòa thu được công thức tính toán dao động của dầm dưới dạng:

$$(K - \omega^2 M)W = 0 \quad (10)$$

Tần số dao động của dầm dựa vào việc triển khai công thức:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (11)$$

Trong đó, K là ma trận độ cứng của

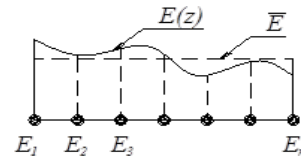
dầm, M là ma trận khối lượng của dầm.

3. PHƯƠNG PHÁP MÔ PHỎNG MONTE CARLO

Trong nghiên cứu này, không gian biến đổi của đặc tính vật liệu, cụ thể là mô đun đàn hồi được theo trường đồng nhất ngẫu nhiên. Để mô đun đàn hồi là trường ngẫu nhiên cần rời rạc hóa các biến theo công thức phần tử hữu hạn. Trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi được giả thiết theo công thức:

$$E(z) = E_0 [1 + r_E(z)] \quad (12)$$

Trong đó, $r_E(z)$ là trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi theo quy luật Gaussian.



Hình 3. Mô hình xấp xỉ trường ngẫu nhiên mô đun đàn hồi.

Trung bình biến ngẫu nhiên theo phần tử, trường ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi được tính theo công thức:

$$\bar{E} = E_0 \left[1 + \frac{r_{E1} + r_{E2} + \dots + r_{En}}{n} \right] \quad (13)$$

Để đánh giá sự biến đổi của véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên, tác giả sử dụng phương pháp mô phỏng Monte Carlo. Hàm ngẫu nhiên được xây dựng theo phân bố Gaussian [12] và có hàm dạng như công thức 14.

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N-1} A_i \cos(\omega_i x + \varphi_i) \quad (14)$$

Trong đó: φ_i là góc pha ban đầu của hàm ngẫu nhiên và có giá trị từ 0 đến 2π ; N chính là

số giá trị trong pha ban đầu; $A_n = \sqrt{2S_{ff}(n\Delta\omega)\Delta\omega}$ là biên độ của hàm ngẫu nhiên.

Hàm mật độ được xác định bởi công thức:

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma_f^2 d e^{(-d^2 \omega^2)}, \quad -\infty < \omega_n < \infty \quad (15)$$

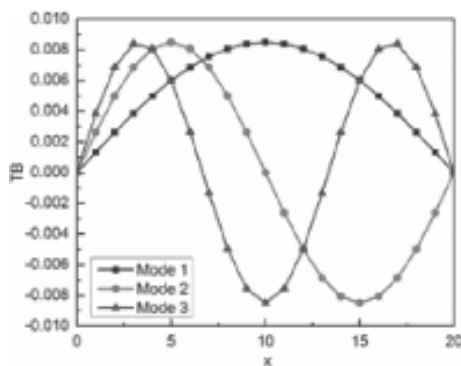
Ở đây, σ_f là độ lệch chuẩn đầu vào, d là độ dài tương quan của hàm ngẫu nhiên.

Trong tất cả các trường hợp, hệ số biến thiên (HSBT) là tỷ số giữa độ lệch chuẩn (DLC) và giá trị trung bình (TB) của véc tơ riêng (công thức 16) tính theo dầm có cơ tính biến thiên.

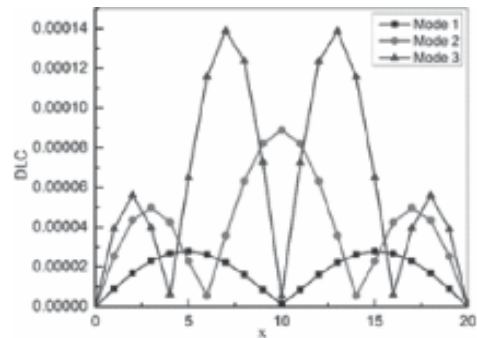
$$HSBT = \frac{DLC}{TB} \quad (16)$$

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

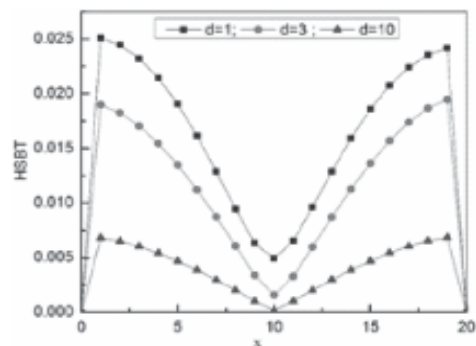
Để khảo sát sự biến thiên của véc tơ riêng trong bài toán ngẫu nhiên mô đun đàn hồi trên dầm có cơ tính biến thiên, nghiên cứu chọn dầm có cơ tính biến thiên với số liệu cụ thể: chiều dài 10 m, chiều cao 1 m và chiều rộng 1 m. Mô đun đàn hồi cũng được giả thiết là $E_0 = 7,0$ GPa, mật độ khối lượng $\rho_0 = 2780$ kg/m³. Trong tất cả các trường hợp mô phỏng Monte Carlo, số mẫu tính toán là 10.000.



Hình 4. Trung bình của véc tơ riêng tại các mode dao động



Hình 5. Độ lệch chuẩn của véc tơ riêng tại các mode dao động

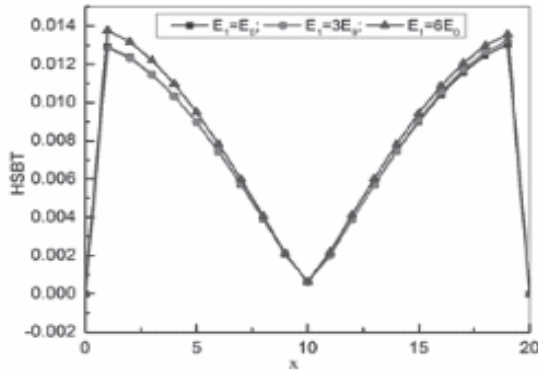


Hình 6. Hệ số biến thiên của véc tơ riêng tại các mode dao động

Khảo sát sự biến đổi của giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của véc tơ riêng theo chiều dài dầm có cơ tính biến thiên được thể hiện trên hình 4 và hình 5 tại ba dạng dao động đầu tiên. Độ lệch chuẩn đầu vào trong các trường hợp khảo sát được lựa chọn là $\sigma_f = 0,1$ và độ dài tương quan $d = 5$. Véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên khi lấy giá trị trung bình thay đổi giống xu hướng trong bài toán tiền định [9]. Đây là cơ sở tin cậy cho các khảo sát tiếp theo của bài toán ngẫu nhiên véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên.

Hình 6 trình bày sự thay đổi của hệ số biến thiên tại dạng dao động đầu tiên của dầm có cơ tính biến thiên. Độ dài tương quan (d) được lựa chọn là 1, 3 và 10 và độ lệch chuẩn đầu vào (σ_f) là 0,2. Kết quả khảo sát cho thấy rằng, hệ số biến thiên của véc tơ riêng giảm dần

khi tăng độ lệch chuẩn. Xu hướng này ngược với kết quả khảo sát véc tơ riêng của dầm có cơ tính biến thiên khi ngẫu nhiên mô đun đàn hồi [11].



Hình 7. Hệ số biến thiên của tần số dao động tự nhiên với sự khác biệt tỷ số mô đun đàn hồi

Hình 7 khảo sát sự thay đổi của hệ số biến thiên theo tỷ lệ mô đun đàn hồi tại mặt trên và mặt dưới của dầm (E_1) với mô đun đàn hồi giữa dầm (E_0) tại dạng dao động đầu tiên. Ba trường hợp được khảo sát là $E_1 = E_0$, $E_1 = 3E_0$ và $E_1 = 6E_0$. Kết quả cho thấy không có nhiều sai lệch của hệ số biến thiên của véc tơ riêng khi thay đổi tỷ số mô đun đàn hồi của dầm có cơ tính biến thiên.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã trình bày sự biến đổi của véc tơ riêng trên dầm có cơ tính biến thiên bằng phương pháp mô phỏng Monte Carlo dựa trên phân tích phần tử hữu hạn. Hệ số biến thiên của véc tơ riêng giảm dần khi giá trị độ dài tương quan tăng. Kết quả nghiên cứu cũng thể hiện hệ số biến thiên của véc tơ riêng không ảnh hưởng bởi tỷ lệ mô đun đàn hồi của dầm có cơ tính biến thiên. Công trình sẽ là nền tảng phát triển cho những nghiên cứu tiếp theo của tác giả. ❖

Ngày nhận bài: 05/4/2023

Ngày phản biện: 05/5/2023

Tài liệu tham khảo:

- [1]. KOIZUMI M. (1997); *FGM activities in Japan*. Composites Part B: Engineering, Vol. 28, No. 1, pp. 1-4.
- [2]. MAHAMOOD R.M., AKINLABI E., SHUKLA D.M. and PITYANA S. (2012); *Functionally graded material: An overview*. Proceedings of the World Congress on Engineering vol. III, Vol. 3, pp. 4-6.
- [3]. BHAVAR V., KATTIRE P., THAKARE S., PATIL S. and SINGH R.K.P. (2017); *A Review on Functionally Gradient Materials (FGMs) and Their Applications*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Vol. 229, No. 1, pp. 12-21.
- [4]. ALSHORBAGY A.E., ELTAHER M.A. and MAHMOUD F.F. (2012); *Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method*. Applied Mathematical Modelling, Vol. 35, No. 1, pp. 412-425.
- [5]. CHAKRABORTY A., GOPALAKRISHNAN S. and REDDY J.N. (2003); *A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials*. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 45, No. 3, pp. 519-539.
- [6]. KE L.L., YANG J. and KITIPORNCHAI S. (2009); *An analytical study on the nonlinear vibration of functionally graded beams*. Meccanica, Vol. 45, No. 6, pp. 743-752.
- [7]. BENYOUNCEF S., MECHAB I., TOUNSI A., FEKRAR A., AIT ATMANE H. and ADDA BEDIA E.A. (2010); *Bending of thick functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations*. Mechanics of Composite Materials, Vol. 46, No. 4, pp. 425-534.
- [8]. AIT ATMANE H., TOUNSI A., MEFTAH S.A. and BELHADJ H.A. (2010); *Free Vibration Behavior of Exponential Functionally Graded Beams with Varying Cross-section*. Journal of Vibration and Control, Vol. 17, No. 2, pp. 311-318.
- [9]. HIEN, T.D., THUAN N.V. and HYUK C.H. (2014); *Eigen analysis of functionally graded beams with variable cross-section resting on elastic supports and elastic foundation*. Structural engineering and mechanics, Vol. 52, No.5, pp. 1033-1049.
- [10]. THUAN, N.V. and HYUN, C.N. (2016); *Investigation into the effect of random material properties on the variability of natural frequency of functionally graded beam*. KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 21, pp. 1264-1272.
- [11]. THUAN, N.V. and HIEN, T.D. (2020); *Stochastic perturbation-based finite element for free vibration of functionally graded beams with uncertain elastic modulus*. Mechanics of composite materials, Vol. 56, pp. 485-496.
- [12]. SHINOZUKA M. and DEODATIS G. (1991); *Simulation of stochastic processes by spectral representation*. Applied Mechanics Reviews, Vol. 44, No. 4, pp. 191-204.